I compitino di Geometria

CdL in Astronomia, CdL in Fisica

29 novembre 2013

Cognome	Nome	Matricola $i = 1$	Es.1(14 pt)	Es.2(9pt)	Es.3(8pt)	Tot.(31pt)

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Si consideri l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ di matrice A rispetto alle basi canoniche.

a) (4pt) Scrivere la matrice B di f rispetto alle basi $\underline{e}' = \{e_5, e_4, e_3, e_2, e_1\}$ del dominio e $\underline{e}'' = \{e_4, e_3 + e_2, e_2, e_1\}$ del codominio.

b) (4pt) Determinare una base di $\ker(f)$ e le sue equazioni parametriche.

c) (4pt) Scrivere una base di $im(f)$ e le sue equazioni cartesiane.

(d) (2pt) Quanto valgono rango e nullità di f? Verificare la formula generale su rango e nullità nel caso di f.

a) Chiamiamo (abusivamente) $\underline{e}$ sia la base canonica di $\mathbb{R}^5$ che quella di $\mathbb{R}^4$, scriviamo $\underline{e}' = \underline{e}P_1$, $\underline{e}'' = \underline{e}P_2$, $f(\underline{e}) = \underline{e}A$, $f(\underline{e}') = \underline{e}''B$. Allora è

$$f(\underline{e}') = \underline{e}''B = \underline{e}P_2B = f(\underline{e})P_1 = \underline{e}AP_1 \ .$$

Dunque

$$B = P_2^{-1}AP_1 \ .$$

Calcoliamo:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Quindi

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 4 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) La matrice A è equivalente per trasformazioni elementari sulle righe a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In particolare il rango di A è 3 e una base del nucleo è

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1/4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

c) La matrice A è equivalente per trasformazioni elementari sulle colonne alla matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Si conferma che il rango della matrice è 3. Una base dello spazio immagine di f è data dalle colonne di A' e la sua equazione cartesiana è

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 .$$

d) Si ha $\text{rango}(f) + \text{null}(f) = 3 + 2 = 5$, dimensione del dominio.

Esercizio 2. Nello spazio affine euclideo $\mathbb{R}^3$ con coordinate ortogonali (x, y, z), siano

$$\pi : x - y + z = 1 \quad \text{e} \quad \pi' : x + y + z = 2 ,$$

due piani.

a) (3pt) Scegliere $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che il vettore $(0, a, 1)$ sia parallelo a π e il vettore $(2, 1, b)$ sia parallelo a π'.

b) (6pt) Per gli a, b ottenuti, determinare un vettore v avente proiezione ortogonale su π eguale a $(0, a, 1)$ e proiezione ortogonale su π' parallela a $(2, 1, b)$.

a) Un vettore normale a π è $(1, -1, 1)$ mentre uno normale a π' è $(1, 1, 1)$. Allora perché $(0, a, 1)$ sia parallelo a π deve essere $(1, -1, 1) \cdot (0, a, 1) = 0$ e cioè $a = 1$. Invece perché $(2, 1, b)$ sia parallelo a π' deve essere $(1, 1, 1) \cdot (2, 1, b) = 0$, e cioè $b = -3$.
b) Il vettore v deve soddisfare alle condizioni

$$v = (0, 1, 1) - \lambda(1, -1, 1) = \mu(2, 1, -3) + \nu(1, 1, 1) ,$$

per qualche $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Difatti, la prima dice che la proiezione ortogonale di v su π è proprio $(0, a, 1) = (0, 1, 1)$, mentre la seconda dice che la proiezione ortogonale di v su π' è un multiplo di (cioè è parallela a) $(2, 1, b) = (2, 1, -3)$. Si ottiene il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

che ammette l'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ * \\ * \end{pmatrix} .$$

Dunque

$$v = (0, 1, 1) + 2/5\,(1, -1, 1) = (2/5, 3/5, 7/5) .$$

Esercizio 3. Sia A una matrice quadrata in $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ con 12 coefficienti $= 0$ e i rimanenti 4 eguali a 2,3,4,5.

a) (3pt) Che valori può assumere il determinante di A?

b) (5pt) Quante sono le matrici invertibili A del tipo sopra descritto?

a) Il determinante di A è 0 a meno che le cifre 2,3,4,5 non siano distribuite esattamente una in ogni colonna e una in ogni riga. Quindi le matrici a determinante non nullo sono fatte come le matrici delle permutazioni 4 oggetti, eccetto che al posto di 1 c'è una delle cifre 2,3,4,5. Il determinante di una tale matrice è $\pm 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = \pm 120$.
b) Le matrici invertibili sono quelle a determinante non nullo. Per contare quante sono, si possono prima contare le matrici che hanno esattamente una cifra 1 in ogni riga e in ogni colonna, e tutte cifre 0 altrove. Queste sono tante quante le permutazioni di 4 oggetti, cioè $4! = 24$. Però noi, per ogni data matrice di permutazione, possiamo inserire 4 valori diversi (e cioè 2,3,4,5) in ogni casella dove c'è 1. Questo lo si può ancora fare in $4! = 24$ modi diversi. Dunque in tutto le matrici invertibili del tipo richiesto sono 24^2.