# Appello estivo di Geometria

CdL in Astronomia, CdL in Fisica
10 settembre 2014

| Cognome | Nome | Matricola |
|---|---|---|
| | | |

| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Tot. scritto | Orale | Finale |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

**Esercizio 1.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ con coordinate $(x, y, z, w, t)$ rispetto alla base canonica, si considerino i due sottospazi

$$U : \begin{cases} x + y - w + t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \\ x + y + w = 0 \end{cases} \quad , \quad V : \langle (0,1,0,-1,1), (2,2,1,0,0), (0,1,-1,0,1) \rangle \ .$$

a) (2pt) Determinare la dimensione di $U$ e di $V$.

Si ha

$$U : \begin{cases} w = \lambda \\ z = \mu \\ t = 2\lambda \\ y = 4\lambda - \mu \\ x = -5\lambda + \mu \end{cases} \ .$$

per $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, cosicché $\dim U = 2$. Si ha $\dim V = 3$ poichè i 3 vettori generatori sono l.i. come si vede subito procedendo tramite operazioni elementari sulle righe della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

b) (2pt) Determinare una base di $U \cap V$.

Conviene esprimere il generico vettore di $V$ nella forma $(2b, a+2b+c, b-c, -a, a+c)$, per $a, b, c \in \mathbb{R}$. Allora la condizione che questo vettore appartenga a $U$ dà $a = b = c = 0$. Dunque

$$U \cap V = (0) \ .$$

c) (2pt) Dimostrare che $\mathbb{R}^5 = U \oplus V$.

d) (4pt) Proiettare il vettore $(0, 9, 2, 0, 4)$ su $V$ nella direzione di $U$.

Si ha

$$(0, 9, 2, 0, 4) = (-4, 3, 1, 1, 2) + (4, 6, 1, -1, 2) \ ,$$

ove il primo vettore $\in U$ e il secondo $\in V$. Quindi $(4, 6, 1, -1, 2)$ è la proiezione di $(0, 9, 2, 0, 4)$ su $V$ in direzione di $U$.

**Esercizio 2.** Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ con coordinate ortogonali $(x, y, z)$, si considerino le due rette $r$ e $s$ di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x - y = -1 \\ z = 1 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

a) (3pt) Determinare equazioni parametriche per $r$ e $s$.

$$r = \{ P_a := (0,1,1) + a\,(1,2,0) \ , \ a \in \mathbb{R} \} \ , \ s = \{ Q_b := (2,1,-1) + b\,(0,1,-1) \ , \ b \in \mathbb{R} \}$$

b) (3pt) Determinare l'equazione del piano $\sigma$ per $s$ parallelo a $r$ e del piano $\rho$ per $r$ parallelo a $s$.

Si ha $(1,2,0) \times (0,1,-1) = (-2,1,1)$ e dunque

$$\rho : -2x + (y-1) + (z-1) = 0 \ \text{ e } \ \sigma : -2(x-2) + (y-1) + (z+1) = 0 \ .$$

Quindi

$$\rho : -2x + y + z = 2 \ \text{ e } \ \sigma : -2x + y + z = -4 \ .$$

c) (3pt) Determinare la distanza di $\rho$ da $\sigma$.

Si prende un punto $P \in \rho$, per esempio $P = P_0 = (0,1,1)$ e si ha che la distanza di $P$ da $\sigma$ è data da

$$\frac{|-2(0-2) + (1-1) + (1+1)|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \ .$$

d) (3pt) Determinare la distanza di $r$ da $s$ con la formula del prodotto misto e verificare che coincide con la distanza tra $\rho$ e $\sigma$.

Siano $\vec{u} = (1,2,0)$ e $\vec{v} = (0,1,-1)$ i vettori direttori di $r$ e $s$, rispettivamente. La formula per il calcolo della distanza tra $r$ e $s$ è

$$\frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (Q_0 - P_0)|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{|(-2,1,1) \cdot (2,0,-2)|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \ .$$

c) (3pt) Determinare l'equazione della retta $\ell$ incidente sia $r$ che $s$ e perpendicolare ad entrambe.

Dobbiamo scegliere $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che il vettore

$$Q_b - P_a = (2 - a, b - 2a, -2 - b) \ ,$$

sia parallelo a $(-2,1,1)$. Dunque deve essere $a = 0$ e $b = -1$. Quindi la retta $\ell$ è la congiungente $P_0 = (0,1,1)$ e $Q_{-1} = (2,0,0)$. Di nuovo vediamo che la distanza di $r$ da $s$ coincide con la distanza di $P_0$ da $Q_{-1}$, che vale appunto $\sqrt{6}$.

**Esercizio 3.** Nel piano euclideo standard $\mathbb{R}^2$ con coordinate ortogonali $(x, y)$, si consideri la conica di equazione

$$\mathcal{Q} : 9x^2 + 3y^2 - 6\sqrt{3}xy - (22 + 12\sqrt{3})x + (12 + 2\sqrt{3})y + 25 + 4\sqrt{3} = 0 \ .$$

a) (1pt) Si scriva la matrice $A$ della conica nelle coordinate $(x, y)$.

La matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 25 + 4\sqrt{3} & -11 - 6\sqrt{3} & 6 + \sqrt{3} \\ -11 - 6\sqrt{3} & 9 & -3\sqrt{3} \\ 6 + \sqrt{3} & -3\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \ \text{ e } \ A' = \begin{pmatrix} 9 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

b) (3pt) Di che tipo di conica si tratta? Si determini una rotazione

$$P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{con } P \in O^+(2,\mathbb{R}) ,$$

in modo che l'equazione di $\mathcal{Q}$ nelle coordinate $(X,Y)$ non contenga il termine in $XY$.

Gli autovalori di $A'$ sono 12 e 0 e i corrispondenti autovettori normalizzati sono

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} .$$

Dunque

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} ,$$

soddisfa

$$P^t A' P = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

c) (2pt) Si scriva la matrice $B$ di $\mathcal{Q}$ nelle coordinate $(X,Y)$.

La matrice è

$$B = \begin{pmatrix} 25+4\sqrt{3} & -12-6\sqrt{3} & -4 \\ -12-6\sqrt{3} & 12 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

d) (2pt) Traslare le coordinate $(u,v) = (X-a, Y-b)$ in modo che l'equazione di $\mathcal{Q}$ nelle coordinate ortogonali $(u,v)$ sia nella forma $u^2 = cv$. Quanto vale $c$?

Si prende $(a,b) = (1+\sqrt{3}/2, 1/2-\sqrt{3})$ cosicché l'equazione della conica diviene

$$u^2 = \frac{2}{3}v .$$

e) (3pt) Determinare il vertice e l'asse della parabola $\mathcal{Q}$ nelle originarie coordinate $(x,y)$.

La trasformazione complessiva di coordinate è

$$\begin{cases} u = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ v = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Il vertice è $(u,v) = (0,0)$ e dunque $(x,y) = (1,-2)$. L'asse è $u = 0$ e dunque $\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 0$.

**Esercizio 4.** (**Domanda per l'orale**) Sia Le matrici reali $n\times m$ formano uno spazio vettoriale $M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Di che dimensione? Sia $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ una matrice fissata. Discutere l'equazione $AX = 0$, ove $X$ è una matrice variabile in $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e 0 è la matrice $2\times 2$ con tutti i coefficienti nulli.

**Esercizio 5.** (**Domanda per l'orale**) Come si caratterizza una parabola fra le coniche? Sia $\mathcal{Q}$ una parabola di matrice $A$ (reale e simmetrica) nelle coordinate ortogonali $(x, y)$ in $\mathbb{R}^2$ euclideo standard. Come si applica il teorema spettrale per dimostrare che $\mathcal{Q}$ ha una forma canonica del tipo $v = au^2$, rispetto ad altre coordinate ortogonali $(u, v)$?