I compitino di Geometria

CdL in Astronomia, CdL in Fisica

21 novembre 2014

Compilare la prima tabella qui sotto ove AB è la parte finale del proprio numero di matricola. Si calcoli $a = \min(|A - B|, 4)$ e $b = \min(||A - B| - 5|, 4)$. Il testo dipenderà dai numeri $(a; b)$.

Cognome	Nome	Matricola	$(a; b) = (\ \ ;\ \ )$

Es.1 (8 punti)	Es.2 (8 punti)	Es.3 (8 punti)	Es.4 (8 punti)	Tot. (32 punti)

Esercizio 1. Nello spazio affine euclideo standard $\mathbb{R}^3$ si indichi con O l'origine e con $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ la base ortonormale standard. Sia $\underline{v} := a\underline{i} + x\underline{j} + (b+1)\underline{k}$.

1. (2 pt.) Si determini $x \in \mathbb{R}$ in modo che $\underline{v} \times (\underline{i} + \underline{j})$ sia parallelo a $-\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$.

   Risposta $x = a - b - 1$, $\underline{v} := a\underline{i} + (a - b - 1)\underline{j} + (b + 1)\underline{k}$.

2. (2 pt.) Trovare il volume del parallelepipedo Π ottenuto applicando i 3 vettori $\underline{u} := -\underline{i} + \underline{j} + 3\underline{k}$, $\underline{j}$ e $\underline{v}$ nell'origine O.

   Risposta: $\mathrm{vol}(\Pi) = |\det A|$ ove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & a-b-1 & b+1 \end{pmatrix}$$

   Quindi $\mathrm{vol}(\Pi) = 3a + b + 1$.

3. (2 pt.) Determinare i 4 vettori diagonali di Π.

   Risposta:

   (a) $\underline{u} + \underline{j} + \underline{v} = (a-1)\underline{i} + (a-b+1)\underline{j} + (b+4)\underline{k}$,
   (b) $-\underline{u} + \underline{j} + \underline{v} = (a+1)\underline{i} + (a-b-1)\underline{j} + (b-2)\underline{k}$,
   (c) $\underline{u} - \underline{j} + \underline{v} = (a-1)\underline{i} + (a-b-1)\underline{j} + (b+4)\underline{k}$,
   (d) $\underline{u} + \underline{j} - \underline{v} = (-a-1)\underline{i} + (-a+b+3)\underline{j} + (-b+2)\underline{k}$.

4. (2 pt.) Determinare il vettore diagonale di Π avente proiezione ortogonale sul sottospazio $\langle \underline{i} + \underline{j} + \underline{k} \rangle$ di lunghezza massima e tale lunghezza.

   Risposta: è il primo, la lunghezza della sua proiezione è $(2a+4)/\sqrt{3}$.

Esercizio 2. Nello spazio affine $\mathbb{R}^4$ con coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4), si considerino i due piani

$$\pi : \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = b \end{cases}, \quad \sigma : \begin{cases} x_1 + x_3 = 2b \\ -x_1 + bx_2 + x_3 + bx_4 = 0 \end{cases}.$$

1. (4 pt.) Sono incidenti, paralleli, sghembi, ... ?

   Risposta: Non sono né paralleli né sghembi. Sono incidenti se e solo se $ab = 0$.

2. (4 pt.) Determinare l'equazione parametrica di una retta per il punto $(1, 2, b, a)$ parallela ad entrambi.

   Risposta: $(1, 2, b, a) + \langle(0, 1, 0, -1)\rangle$.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul corpo K. Sia $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ una base di V e siano $U = \langle u_1 := v_1 + v_2, u_2 := v_2 + v_3 \rangle$, $W = \langle w := av_1 + (a-b)v_2 + v_3 \rangle$, due sottospazi.

1. (1 pt.) Scrivere la matrice $P \in GL(3, K)$ tale che $(u_1, u_2, w) = \underline{v}P$.

2. (3 pt.) Calcolare P^{-1} e verificare il risultato moltiplicandolo per P.

   Risposta:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & a-b \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad P^{-1} = (1+b)^{-1} \begin{pmatrix} 1+b-a & a & -a \\ -1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (2 pt.) Controllare che, se si scrive

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

   ove $Q_1 \in M_{2\times 3}(K)$, $Q_2 \in M_{1\times 3}(K)$, si ha $\underline{v} = \underline{u}Q_1 + wQ_2$, ove $\underline{u} = (u_1, u_2)$ (somma componente per componente di matrici 1×3 di vettori).

   Risposta: è $\underline{v} = (u_1, u_2, w)P^{-1} = (u_1, u_2)Q_1 + wQ_2 = \underline{u}Q_1 + wQ_2$.

4. (2 pt.) Chi è dunque la matrice della proiezione $\pi_U : V \to U$ nella direzione di W nelle basi $\underline{v}$ e $\underline{u}$, cioè la matrice R tale che $\pi(\underline{v}) = \underline{u}R$?

   Risposta: è

$$R = Q_1 = (1+b)^{-1} \begin{pmatrix} 1+b-a & a & -a \\ -1 & 1 & b \end{pmatrix} .$$

Esercizio 4. Sia A una matrice in $M_{3\times4}(\mathbb{R})$ con 8 coefficienti $=0$ e i rimanenti 4 (tra loro distinti) nell'insieme $\{1, a+2, a+3, -b-1\}$.

b) (4pt) Quante sono le matrici A del tipo sopra descritto che hanno una riga eguale a $(-b-1, a+2, 0, 0)$, una colonna nulla e rango 3 ? Giustificare il risultato.

   Risposta: Le matrici sono 48. Difatti, ci sono 3 scelte per posizionare la riga indicata. Poi ci sono 2 scelte per posizionare la colonna nulla. Poniamo di avere scelto di posizionare la riga indicata per prima e la colonna nulla per ultima. Nella terza colonna siamo obbligati a porre uno tra due numeri $\{a+3, -b-1\}$, nel posto $(2,3)$ o $(3,3)$. Questo dà 4 ulteriori possibilità di scelta. A questo punto, se per esempio si è deciso di mettere $a+3$, nel posto $(2,3)$, rimane solo da decidere se mettere $-b-1$ nel posto $(3,1)$ o $(3,2)$. Quindi altre 2 scelte. In tutto sono $3\times2\times2\times4\times2 = 48$.

a) (4pt) Che valori possono assumere i minori di ordine 3 delle matrici A del punto precedente?

   Risposta: 0 oppure $\pm(a+2)(a+3)$, $\pm(a+3)(b+1)$.