2^o Appello di Geometria AA 2014/15

CdL in Astronomia, CdL in Fisica
20 febbraio 2015

Compilare la prima tabella qui sotto ove AB è la parte finale del proprio numero di matricola. Si calcoli $a = 1 + \lfloor \frac{A+B}{5} \rfloor$ e $b = 1 + \lfloor \frac{B}{4} \rfloor$. (Uso la notazione "ufficiale" $\lfloor x \rfloor$ per il massimo intero $n \leq x$.) Sostituire il vostro valore di $(a;b)$ nelle domande del testo.

Cognome	Nome	Matricola	(a,b)

Es. 1 (11 pt)	Es. 2 (11 pt)	Es. 3 (11 pt)	Totale (33 pt)	Orale	Finale

Esercizio 1. Nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^4$ con coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4), si considerino i due piani

$$\pi : \begin{cases} x_1 = 2 \\ -ax_2 + x_3 = 2-2a \end{cases}, \quad \sigma : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 - bx_3 = 1-b \end{cases}.$$

a) (3pt) Determinare la posizione reciproca di π e di σ ed eventuali intersezioni.

Risposta. La matrice incompleta del sistema lineare che determina $\pi \cap \sigma$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 \\ 1 & 0 & -b \end{pmatrix} = ab \neq 0 .$$

il rango di A vale 3. Quindi gli spazi direttori di π e σ hanno un sottospazio di dimensione 1 in comune. La matrice completa del sistema lineare che determina $\pi \cap \sigma$ è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -a & 1 & 0 & 2-2a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -b & 0 & 1-b \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -a & 1 & 2-2a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -b & 1-b \end{pmatrix} = 1 - b(1-2a) \neq 0 ,$$

si ha $\pi \cap \sigma = \emptyset$. I piani π e σ non sono né sghembi, né incidenti, né paralleli.

b) (2pt) Esistono rette su π parallele a σ? Si sí, determinarne la direzione.

Risposta. Sí, sono tutte le rette parallele al vettore $w = (0,0,0,1)$.

c) (3pt) Sia τ l'iperpiano $x_4 = 0$. Determinare equazioni parametriche delle rette $r := \pi \cap \tau$ e $s := \sigma \cap \tau$.

Risposta. Si ha $r = P + \langle u \rangle$, ove $P = (2,2,2,0)$ e $u = (0,1,a,0)$, e $s = q + \langle v \rangle$, ove $Q = (1,0,1,0)$ e $v = (b,0,1,0)$.

d) (3pt) Calcolare la distanza $d(r,s)$ tra r e s.

Risposta. Possiamo dimenticare l'ultima coordinata x_4 che è sempre $= 0$. Quindi vediamo r e s in τ, identificato con $\mathbb{R}^3$ tramite le coordinate (x_1, x_2, x_3). Allora

$$d(r,s) = \frac{\mathrm{vol}(\Pi(u,v,P-Q))}{|u \times v|} \,.$$

Si ha

$$\mathrm{vol}(\Pi(u,v,P-Q)) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ b & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = |1 - b(1-2a)| \,,$$

e

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & a \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{i} + ab\mathbf{j} - b\mathbf{k} \,,$$

cosicché $|u \times v| = \sqrt{1 + b^2 + a^2 b^2}$ e finalmente

$$d(r,s) = \frac{|1 - b(1-2a)|}{\sqrt{1 + b^2 + a^2 b^2}} \,.$$

e) (**Domanda per l'orale**) È vero che $d(r,s) = d(\pi, \sigma)$? Spiegare.

Risposta. Sí, è vero. Difatti le rette r e s sono sghembe nello spazio euclideo τ, che abbiamo identificato con $\mathbb{R}^3$. Osserviamo che ogni punto R di $\mathbb{R}^4$ si scrive unicamente come $R = R_0 + \lambda w$, ove $R_0 \in \tau$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ sono unicamente determinati da R. Inoltre, il punto $R_0 + \lambda w$ sta in π se e solo se $R_0 \in r$. Analogamente, scriviamo $S \in \mathbb{R}^4$ come $S = S_0 + \mu w$, ove $S_0 \in \tau$ e $\mu \in \mathbb{R}$. Ancora, il punto $S = S_0 + \mu w$ sta in σ se e solo se $S_0 \in s$. Allora, la distanza tra un qualunque punto $R_0 + \lambda w$ di π e un qualunque punto $S_0 + \mu w$ si σ, è $\geq$ della distanza tra R_0 e S_0, ed è uguale, se e solo se $\lambda = \mu$. Ma in tal caso $d(R_0 + \lambda w, S_0 + \lambda w) = d(R_0, S_0)$, e questa è una distanza tra un punto di r e un punto di s.

Esercizio 2. Si consideri la matrice reale simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

a) (3pt) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A. (Può aiutare sapere che $9^3 = 729$).

Risposta. Il polinomio caratteristico è

$$p_A(X) = X^3 - 9X^2 - 81X + 729 = (X-9)^2(X+9) \,.$$

b) (4pt) Determinare una base ortonormale di autovettori di A.

Risposta. Per esempio

$$\ker(A-9) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle \ , \ \ker(A+9) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ .$$

I vettori evidenziati formano una base ortogonale. Sono tutti di lunghezza 3, quindi basta dividerli tutti per 3 per ottenere una base ortonormale.

c) (4pt) Determinare una matrice ortogonale P tale che $P^{\mathrm{t}}AP$ sia diagonale. (Effettuare la verifica.)

Risposta.

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Sia $A = \mathbb{R}^3$ lo spazio affine euclideo con coordinate standard (x, y, z): chiamiamo $(O; P_1, P_2, P_3)$ i punti fondamentali del riferimento standard (cioè $O = (0, 0, 0)$, $P_1 = (1, 0, 0)$, $\ldots$). Sia π il piano di equazione $x + y - z = 1$ a sia $p : A \to \pi$ la proiezione ortogonale di A su π.

a) (2pt) Determinare $O' = p(O)$, $P_1' = p(P_2)$, $P_2' = p(P_3)$.

Risposta. Si ha $O' = (1/3, 1/3, -1/3)$, $P_1' = (0, 1, 0)$, $P_2' = (2/3, 2/3, 1/3)$.

b) (3pt) Si prendano i punti $(O'; P_1', P_2')$ come punti fondamentali di un riferimento affine su π; siano (u, v) le corrispondenti coordinate affini. Determinare le coordinate (u, v) del punto $(a, 1, a)$.

Risposta. Le coordinate sono $(1 - a, 2a)$. Difatti si ha $O'P_1' = (-1/3, 2/3, 1/3)$ e $O'P_2' = (1/3, 1/3, 2/3)$. Poi

$$(1-a)(-1/3, 2/3, 1/3) + 2a(1/3, 1/3, 2/3) = (a - 1/3, 2/3, a + 1/3) = (a, 1, a) - (1/3, 1/3, -1/3) \ .$$

c) (3pt) Determinare l'equazione della retta $r = \pi \cap \{x + z = 2a\}$ in coordinate (u, v).

Risposta. Sappiamo già che il punto $(a, 1, a)$, che sta sulla retta r, ha coordinate $(1 - a, 2a)$. prendiamo un altro punto di r, per esempio $P(0, 1 + 2a, 2a)$. Allora le sue coordinate (u, v) sono $(2a + 1, 2a)$. Difatti

$$(2a+1)(-1/3, 2/3, 1/3) + 2a(1/3, 1/3, 2/3) = (-1/3, 2/3+2a, 2a+1/3) = P(0, 1+2a, 2a) - O'(1/3, 1/3, -1/3) \ .$$

Quindi l'equazione della retta in questione è l'equazione della retta congiungente i punti $(1 - a, 2a)$ e $(2a + 1, 2a)$ nel piano (u, v). Dunque si tratta della retta

$$v = 2a \ .$$

d) (3pt) Si consideri la proiezione $q : A \to \pi$ nella direzione del vettore $w = (0, 0, 1)$. Calcolare le coordinate (u, v) del punto $q(x, y, z)$.

Risposta. Si ha $(u, v) = (y - x, 2x + y - 1)$.

Esercizio 4. (**Domanda per l'orale**) Enunciare gli assiomi di *gruppo abeliano* $(G, \cdot)$, di *campo di numeri* $(C, +, \cdot)$ e di *C-spazio vettoriale* $(V, +, \cdot)$.