CAPITOLO 4

Spazi vettoriali

1. Definizione di spazio vettoriale

ESEMPIO 4.1. In questo capitolo considereremo $\mathbf{R}^n$, l'insieme di n-tuple

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Spesso penseremo a questi elementi come delle matrici $n \times 1$ a valori reali. Nel Capitolo 2 abbiamo introdotto due operazioni che possiamo utilizzare in questo caso particolare. La somma di due elementi di $\mathbf{R}^n$ è definita da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

e il prodotto con uno scalare è dato da

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Inoltre esiste l'elemento 0 dato da

$$\overrightarrow{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Per ogni $u, v, w \in \mathbf{R}^n$ si ha $v + w = w + v$, $u + (v + w) = (u + v) + w$, $v + \overrightarrow{0} = v$ ed esiste un elemento $-v \in \mathbf{R}^n$ tali che $v + (-v) = (-v) + v = \overrightarrow{0}$, (Per gli interessati $(\mathbf{R}^n, \overrightarrow{0})$ è un gruppo abeliano)
- Per la seconda operazione abbiamo $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$; $0v = \overrightarrow{0}$; $1v = v$; $(-1)v = -v$.
- Inoltre abbiamo $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ e $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$.

Uno spazio vettoriale è un insieme che soddisfa tutte queste properietà. Diamo ora la definizione precisa di questa struttura che sarà il cardine del corso.

Per motivi che saranno chiariti più avanti, vogliamo innanzitutto introdurre la nozione di *campo*.

DEFINIZIONE 4.2. Un *campo* $(K, +, \cdot)$ consiste di un insieme K e due operazioni $+ : K \times K \to K$ e $\cdot : K \times K \to K$ che soddisfano

(1) Per ogni $a, b \in K$ abbiamo $a + b = b + a$.
(2) Per ogni $a, b, c \in K$ abbiamo $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(3) Esiste un elemento $0 \in K$ tali che per ogni $a \in K$ vale $a + 0 = 0 + a = a$.
(4) Per ogni $a \in K$ esiste un elemento $(-a)$ t.c. $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
(5) Per ogni $a, b \in K$ abbiamo $a \cdot b = b \cdot a$.
(6) Per ogni $a, b, c \in K$ abbiamo $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
(7) Esiste un elemento $1 \in K$ tale che per ogni $a \in K$ vale $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
(8) Per ogni $a \in K \setminus \{0\}$ esiste un elemento a^{-1} tale che $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
(9) Per ogni $a, b, c \in K$ abbiamo $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Esempio 4.3. I numeri reali $\mathbf{R}$ sono un campo. Anche $\mathbf{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0\}$ è un campo. Gli interi $\mathbf{Z}$ non sono un campo. Per esempio non esiste un $a \in \mathbf{Z}$ tale che $2a = 1$, così la penultima condizione non è soddisfatta.

Nel corso di analisi verrà introdotto il campo dei numeri complessi $\mathbf{C}$. I numeri complessi sono numeri della forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbf{R}$. L'elemento i non appartiene a $\mathbf{R}$ e soddisfa $i^2 = -1$. Quindi l'equazione $x^2 = -4$ ha soluzioni in $\mathbf{C}$, ma non in $\mathbf{R}$.

Esempio 4.4. Un'altra costruzione di campo è la seguente. Prendiamo un numero primo p. Definiamo $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ l'insieme $\{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$.

La somma di $\bar{a} + \bar{b}$ è $\bar{c}$, dove c è il resto della divisione di $a + b$ per p. Similmente, $\bar{a} \cdot \bar{b}$ è il resto della divisione di ab per p.

Quindi vale $\bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{3}$ in $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$.

Osservazione 4.5. Un campo K è un insieme con le quattro operazione di base dell'aritmetica (sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere per un elemento nonzero). In particolare, se prendiamo una matrice con elementi in K, possiamo definire operazioni elementari sulle righe. Inoltre, si controlla facilmente che ogni passo del procedimento di Gauß è definito su K. Quindi se prendiamo una matrice dove tutti gli elementi sono numeri razionali, allora esiste anche una forma a scala dove gli elementi sono numeri razionali.

Osservazione 4.6. Similmente, possiamo definire matrici $m \times n$ con elementi in K. Si controlla che le regole di calcolo usano solo le poperietà della definizione di un campo, quindi valgono per matrici su un qualsiasi campo. Indichiamo con $M_{m \times n}(K)$ l'insieme delle matrici $m \times n$ con elementi in K.

Osservazione 4.7. Più avanti nel corso utilizzeremo la flessibilità di poter scegliere il campo su cui definire i nostri oggetti. In questa prima parte, per facilitare un primo approccio, si può quasi sempre pensare al caso in cui $K = \mathbf{R}$.

Fissiamo adesso un campo K.

Definizione 4.8. Uno spazio vettoriale V sul campo K è un insieme V, i cui elementi si chiamano *vettori*, dotato di due operazioni, $+ : V \times V \to V$ (somma di vettori) e $\cdot : K \times V \to V$ (prodotto con uno scalare), tale che esiste uno $\overrightarrow{0} \in V$ (vettore nullo) con le properietà che per ogni $u, v, w \in V$ e $\lambda, \mu \in K$ vale

(1) $u + (v + w) = (u + v) + w$.
(2) $v + w = w + v$.
(3) $v + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + v = v$.
(4) esiste un vettore $-v \in V$ tale che $v + (-v) = \overrightarrow{0}$.
(5) $\lambda(\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$.
(6) $1 \cdot v = v$.
(7) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$.
(8) $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.

Per $\lambda \in K, v \in V$ scriviamo di solito λv per indicare $\lambda \cdot v$.

Esempio 4.9. Un esempio di spazio vettoriale è $\mathbf{R}^n$ con il prodotto e la somma definiti sopra.

Un altro esempio è

$$M_{m,n}(\mathbf{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \, a_{11}, \dots, a_{mn} \in \mathbf{R} \right\},$$

dove la somme e il prodotto scalare sono definiti come nel Capitolo 2.

Un esempio più complicato è lo spazio dei polinomi, vedi Esempio 4.26.

Esempio 4.10. Per qualsiasi campo K esiste lo spazio vettoriale K^n, dove i vettori sono

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

con $a_1, \dots, a_n \in K$. La somma di vettori e prodotto con scalare sono definiti come nel caso di $\mathbf{R}^n$.

Esempio 4.11. Sia adesso

$$V := \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$$

l'insieme di tutte le funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Allora V è uno spazio vettoriale. Se f, g sono funzioni, definiamo la somma $f + g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ usando

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

e per $\lambda \in \mathbf{R}, f \in V$ si definisce

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Lemma 4.12. *Sia V uno spazio vettoriale su un campo K allora per ogni $v \in V$ e $\lambda \in K$ vale*

(1) $0 \cdot v = \overrightarrow{0}$
(2) $\lambda \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
(3) $(-1) \cdot v = -v$.
(4) $\lambda \cdot v = \overrightarrow{0}$ *implica* $\lambda = 0$ *o* $v = \overrightarrow{0}$.

Dimostrazione. Per il primo punto notiamo che

$$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$$

quindi $\overrightarrow{0} = 0 \cdot v$. (La prima uguaglianza usa che in un campo vale $0 + 0 = 0$; la seconda uguaglianza usa la properità (7) della definizione di spazio vettoriale)

Per il secondo punto abbiamo

$$\lambda \cdot \overrightarrow{0} = \lambda \cdot (\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}) = \lambda \cdot \overrightarrow{0} + \lambda \cdot \overrightarrow{0}.$$

e quindi $\lambda \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$. (Qua si usano le properietà (3) e (8) della definizione di spazio vettoriale.)

Per il terzo punto abbiamo

$$v + (-1) \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v = \overrightarrow{0}$$

(Qua si usa la properità (7) della definizione di spazio vettoriale e il primo punto di questo lemma)

Finalmente, se $\lambda \cdot v = \overrightarrow{0}$ e $\lambda \neq 0$ allora

$$v = 1 \cdot v = (\lambda \frac{1}{\lambda})v = \frac{1}{\lambda}(\lambda v) = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{0}$$

e segue la quarta poperietà. □

Definizione 4.13. Sia V uno spazio vettoriale su K. Un sottoinsieme $W \subset V$ è un *sottospazio vettoriale* di V se

(1) W non è vuoto,
(2) per ogni $v, w \in W$ abbiamo $v + w \in W$,
(3) per ogni $\lambda \in K$, $v \in W$ abbiamo $\lambda w \in W$.

Proposizione 4.14. *Sia V uno spazio vettoriale su K, W un sottospazio vettoriale di V, allora W è uno spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Per definizione W ha le due operazioni $+$ e $\cdot$.

La prima cosa da controllare è che $\overrightarrow{0} \in W$. Dal fatto che W è non vuoto segue che possiamo prendere un $w \in W$. Dalla definizione di sottospazio segue che $(-1) \cdot w \in W$. Dal Lemma precedente segue che $(-1) \cdot w = -w$. Cioè $w, -w \in W$. Dalla definizione di sottospazio segue adesso che $w + (-w) \in W$, cioè $\overrightarrow{0} \in W$.

Delle otto condizione della Definizione 4.8 sette sono soddisfatte automaticamente. L'unica a non essere automatica è la quattro (per ogni $w \in W$ vale che anche $-w \in W$), che abbiamo appena mostrato. □

Osservazione 4.15. La dimostrazione mostra che se W è non-vuoto e soddisfa le properietà (2) e (3) della definizione di sottosapzio, allora $\overrightarrow{0} \in W$. Quindi possiamo anche definire un sottospazio vettoriale come un sottoinsieme $W \subset V$ tale che

(1) $\overrightarrow{0} \in W$.
(2) Per ogni $v, w \in W$ abbiamo $v + w \in W$
(3) Per ogni $\lambda \in K$, $v \in W$ abbiamo $\lambda w \in W$.

Esempio 4.16. Siano m, n interi, A una matrice $m \times n$. Allora $\mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0})$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^n$:

Da $A\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ segue che $\overrightarrow{0} \in \mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0})$, in particolare non è vuoto. Se $v, w \in \mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0})$ allora $Av = \overrightarrow{0}$ e $Aw = \overrightarrow{0}$. Usando le regole di calcolo per le matrici troviamo

$$A(v + w) = Av + Aw = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}.$$

Quindi $v + w \in \mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0})$. In modo simile, se $\lambda \in K$ allora

$$A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

e $\lambda v \in \mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0})$.

È importante notare che, se consideriamo il caso dello spazio $\mathrm{Sol}(A, b)$ con $b \neq \overrightarrow{0}$, allora $A\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \neq b$, cioè $\overrightarrow{0} \notin \mathrm{Sol}(A, b)$. Dalla proprietà che ogni spazio vettoriale contiene $\overrightarrow{0}$ segue adesso che $\mathrm{Sol}(A, b)$ non è un sottospazio vettoriale.

Esempio 4.17. L'esempio precedente ci ha mostrato quando un insieme di soluzioni di un sistema di equazioni lineari è un sottospazio. Un sistema di disuguaglianze non è quasi mai un sottospazio. Per esempio, prendiamo $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. Allora $\overrightarrow{0} \in U$, e per ogni $v, w \in U$ abbiamo che $v+w \in U$. Invece, $(1, 0) \in U$, ma $-(1, 0) = (-1, 0) \notin U$ e per questo motivo non è un sottospazio.

Esempio 4.18. Sia $V = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ lo spazio vettoriale delle funzioni $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Sia V_c il sottoinsieme di funzioni continue. Dal fatto che le funzioni constanti sono continue troviamo che $V_c \neq \emptyset$. Inoltre la somma di due funzioni continue è continua e il prodotto di una funzione continua con una constante è continua. (Vedi le lezioni di Analisi.) Quindi V_c è un sottospazio.

2. Generatori di uno spazio vettoriale

Consideriamo ora un insieme $S \subset V$. Vogliamo trovare il sottospazio $W \subset V$ più piccolo di V che contiene S.

DEFINIZIONE 4.19. Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, \ldots, v_r \in V$. Un vettore $v \in V$ è *una combinazione lineare di* $v_1, \ldots, v_r$ se esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$$

ESEMPIO 4.20. Ogni vettore

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

è una combinazione lineare di

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

Si puo scrivere:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ogni

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

è una combinazione lineare di $(1,1)^T$ e $(1,-1)^T$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1 + x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_1 - x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Il vettore $(4,1,1)^T$ non è una combinazione lineare di $(1,-1,2)^T$ e $(3,1,-1)^T$. Se fosse una combinazione lineare allora esisterebbero $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Scriviamo il sistema di equazioni lineari associato a questo problema:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 4 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 & = & 1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 & = & 1 \end{cases}$$

Questo sistema non ha soluzioni.

DEFINIZIONE 4.21. Sia V uno spazio vettoriale, $S \subset V$ un sottoinsieme. Definiamo lo *span* di S come l'insieme di tutte le combinazioni lineari di elementi di S:

$$\operatorname{span}(S) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \mid r \in \mathbf{Z}_{>0}, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K, v_1, \ldots, v_r \in S\}.$$

Se $S = \emptyset$ definiamo che $\operatorname{span}(S) = \{\overrightarrow{0}\}$.

Diciamo che uno spazio vettoriale V è *generato da* S se $V = \operatorname{span}(S)$ e chiamiamo gli elementi di S *generatori* di V.

PROPOSIZIONE 4.22. *Sia V uno spazio vettoriale, $S \subset V$ un sottoinsieme. Allora* $\operatorname{span}(S)$ *è il sottospazio di V più piccolo che contiene S.*

Dimostrazione. Se $S = \emptyset$ allora $\text{span}(S) = \{\overrightarrow{0}\}$. In questo caso $\text{span}(S)$ è un sottospazio, e dato che ogni spazio vettoriale contiene $\overrightarrow{0}$, allora è il più piccolo.

Se S non è vuoto, allora $S \subset \text{span}(S)$ e quindi $\text{span}(S)$ non è vuoto. Se $v, w \in \text{span}(S)$ allora possiamo scrivere

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r, \ w = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_s w_s$$

Con $v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_r \in S$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_s \in K$. Allora

$$v + w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_s w_s$$

è anche una combinazione lineare di elementi di S e $v + w \in \text{span}(S)$. Simile per $t \in K$ troviamo

$$tv = t(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r) = (t\lambda_1)v_1 + \cdots + (t\lambda_r)v_r$$

ed anche tv è una combinazione lineare di elementi di S. Cioè S è un sottospazio vettoriale di V.

Rimane da mostrare che $\text{span}(S)$ è il sottospazio *più piccolo* che contiene S.

Sia W un sottospazio di V tale che $S \subset W$. Allora, dalla definizione di spazio vettoriale segue che, se un vettore $v \in W$, allora anche tutti i suoi multipli sono in W, ed anche tutte le somme (finite) di elementi sono in W. In particolare, se $S \subset W$ allora tutte le combinazioni lineari di elementi di S sono in W. Quindi $\text{span}(S) \subset W$. □

Osservazione 4.23. Nel caso in cui $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ sia un insieme finito, scriviamo

$$\text{span}(v_1, \ldots, v_r)$$

per $\text{span}(S)$. In questo caso abbiamo

$$\text{span}(v_1, \ldots, v_r) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K\}$$

(Quindi non c'è più la necessità di variare r e i vettori di S.)

Definizione 4.24. Uno spazio vettoriale V è detto *finitamente generato* se esiste un insieme finito S tale che

$$\text{span}(S) = V.$$

Esempio 4.25. Lo spazio $\mathbf{R}^n$ è finitamente generato. Prendiamo i vettori

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Allora ogni $v = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$ si può scrivere come

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

Quindi $\text{span}(e_1, \ldots, e_n) = \mathbf{R}^n$.

Esempio 4.26. Per un intero non-negativo definiamo lo spazio vettoriale $\mathbf{R}[x]_{\leq d}$ dei polinomi di grado al massimo d con coefficienti reali. Come insieme abbiamo

$$\mathbf{R}[x]_{\leq d} = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_d x^d \mid a_0, \ldots, a_d \in \mathbf{R}\}$$

La somma di due polinomi è definita da

$$(a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d) + (b_0 + b_1 x + \cdots + b_d x^d) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_d + b_d)x^d$$

(è importante notare che il simbolo + ha tre significati, come somma “formale” in $\mathbf{R}[x]$, come somma di due elementi di $\mathbf{R}[x]$ e come somma in $\mathbf{R}$.) Il prodotto con uno scalare è definito da

$$\lambda(a_0 + \cdots + a_d x^d) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + \cdots + (\lambda a_d)x^d$$

Possiamo considerare $\mathbf{R}[x]_{\leq d}$ come sottoinsieme di $\mathbf{R}[x]_{\leq e}$ per ogni $e \geq d$. Definiamo $\mathbf{R}[x]$ come lo spazio vettoriale di tutti i polinomi. Quindi

$$\mathbf{R}[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x_3 + \cdots + a_d x_d \mid d \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\ a_0, \ldots, a_d \in \mathbf{R}, a_d \neq 0\}.$$

Allora $\mathbf{R}[x]_{\leq d} = \operatorname{span}(1, x, x^2, \ldots, x^d)$ ed è finitamente generato, $\mathbf{R}[x]$, invece, non è finitamente generato.

Ricapitolando, fino ad ora abbiamo visto che cosa significa $\operatorname{span}(S)$, e la nozione di spazi finitamente generati.

Esempio 4.27. Sia $V = \operatorname{span}((1,1,1),(1,2,0))$. Allora V è lo spazio vettoriale di combinazioni lineari di $(1,1,1)$ e $(1,2,0)$. In particolare $(2,3,1) \in V$. Prendiamo adesso $V' = \operatorname{span}((1,1,1),(1,2,0),(2,3,1))$. Adesso V' è lo spazio vettoriale più piccolo che contiene $(1,1,1),(1,2,0)$ e $(2,3,1)$. Dal fatto che V contiene questi tre vettori segure che $V' \subset V$. Allo stesso tempo abbiamo che $S \subset S'$ allora $\operatorname{span}(S) \subset \operatorname{span}(S')$. In questo modo otteniamo che $V \subset V'$ e quindi $V = V'$.

3. Dipendenza e indipendenza lineare

Siamo adesso interessati ad identificare gli insiemi più piccoli che possano generare uno spazio vettoriale.

Definizione 4.28. Sia V uno spazio vettoriale e $S \subset V$ un sottoinsieme. Diciamo che S è *linearmente dipendente* se esistono $v_1, \ldots, v_r \in S$ (distinti) e numeri $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tali che

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = \overrightarrow{0}$$

e per almeno un i abbiamo $\lambda_i \neq 0$.

Diciamo che S è *linearmente indipendente* se S non è linearmente dipendente.

Esempio 4.29. I vettori $(1,1,1)$ e $(1,2,0)$ sono linearmente indipendenti:

$$\lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,2,0) = (0,0,0)$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione di questo sistema è $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Consideriamo invece i vettori $(1,1,1)$, $(1,2,0)$ e $(2,3,1)$. Allora questi sono linearmente dipendenti:

$$1 \cdot (1,1,1) + 1 \cdot (1,2,0) + (-1) \cdot (2,3,1) = (0,0,0)$$

Esempio 4.30. Se S contiene $\overrightarrow{0}$ allora S è linearmente dipendente:

$$1 \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

Esempio 4.31. Se $S = \{v_1, v_2\}$ consiste di due vettori non nulli, allora v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti se e solo se uno è un multiplo dell'altro:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \overrightarrow{0}$$

Segue che se $\lambda_1 \neq 0$ allora

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$$

Invece, se $\lambda_1 = 0$, allora $\lambda_2 \neq 0$ e $v_2 = \frac{1}{\lambda_2}\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, una contraddizione.

Esempio 4.32. I vettori $e_1, \dots, e_n$ in $\mathbf{R}^n$ sono linearmente indipendenti:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots \lambda_n e_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Il vettore a destra è il vettore nullo se e solo se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Proposizione 4.33. *Sia V uno spazio vettoriale, $S \subset V$ un sottoinsieme. Allora S è linearmente dipendente se e solo se esiste un vettore $v \in S$ che è una combinazione lineare di vettori in $S \setminus \{v\}$.*

Dimostrazione. Se S è linearmente dipendente allora esistono vettori distinti $v_1, \dots, v_r \in S$ tali che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = \overrightarrow{0}.$$

Almeno uno dei λ_i non è zero. Dopo una rinumerazione possiamo assumere che $\lambda_r \neq 0$. Allora

$$v_r = \frac{-\lambda_1}{\lambda_r} v_1 + \dots + \frac{-\lambda_{r-1}}{\lambda_r} v_{r-1}.$$

Quindi v_r è una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_{r-1} \in S \setminus \{v_r\}$.

Se $v \in S$ è un vettore che è una combinazione lineare di vettori di $S \setminus \{v\}$, allora esistono vettori $v_1, \dots, v_{r-1}$ e numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1} \in K$ tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{r-1} v_{r-1}$$

Quindi

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{r-1} v_{r-1} - v = \overrightarrow{0}.$$

□

Proposizione 4.34. *Sia $S = \{v_1, \dots, v_r\} \subset V$ un insieme finito. Allora S è linearmente indipendente se e solo se per ogni $v \in \operatorname{span}(S)$ esistono unici $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ tali che*

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r.$$

Dimostrazione. Assumiamo che S sia linearmente indipendente, prendiamo $v \in \operatorname{span}(S)$. Allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r.$$

Se questi λ_i non sono unici, allora esistono $\mu_1, \dots, \mu_r \in K$ tali che

$$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r.$$

Allora

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} &= v - v \\ &= (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) - (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r) \\ &= (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_r - \mu_r) v_r \end{aligned}$$

Dal fatto che $v_1, \dots, v_r$ sono linearmente indipendenti segue che tutti i coefficienti sono zero, cioè

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0,\ \lambda_2 - \mu_2 = 0,\ \dots, \lambda_r - \mu_r$$

In particolare $\lambda_i = \mu_i$ per $i = 1, \dots, r$ e quindi la combinazione è unica.

Assumiamo adesso che ogni vettore in $\operatorname{span}(S)$ si possa scrivere in modo unico come combinazione lineare dei vettori di S. Dal fatto che $\overrightarrow{0} \in \operatorname{span}(S)$ segue che c'è un'unica combinazione lineare $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$ uguale a $\overrightarrow{0}$. Ma $\lambda_1 = \dots =$

$\lambda_r = 0$ ci dà una combinazione di questo tipo. In particolare S è linearmente indipendente. $\square$

4. Base e dimensione

DEFINIZIONE 4.35. Sia V uno spazio vettoriale. Diciamo che un sottoinsieme B di V è una base se

(1) B è linearmente indipendente
(2) $\operatorname{span}(B) = V$.

PROPOSIZIONE 4.36. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato, B una base di V. Allora ogni vettore v di V si può scrivere in modo unico come combinazione lineare dei vettori di B.*

DIMOSTRAZIONE. Nella Proposizion 4.34 abbiamo mostrato che B è una base di $\operatorname{span}(B)$ se e solo ogni vettore in $\operatorname{span}(B)$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare dei vettori di B. Quindi B è una base di V se e solo se $\operatorname{span}(B) = V$ e ogni vettore in $\operatorname{span}(B)$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare dei vettori di B. Questa ultima affermazione è equivalente al fatto che ogni vettore v di V si possa scrivere in modo unico come combinazione lineare dei vettori di B. $\square$

ESEMPIO 4.37. Sia $V = \mathbf{R}^n$ e consideriamo $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Allora abbiamo già visto che B genera V (Esempio 4.25) e che B è linearmente indipendente (Esempio 4.32). Quindi B è una basa. La chiamiamo *la base canonica* di $\mathbf{R}^n$.

PROPOSIZIONE 4.38. *Sia V uno spazio vettoriale, $B = \{v_1, \ldots, v_r\}$ un sottoinsieme finito. Allora, le seguenti sono equivalenti:*

(i) B è una base.
(ii) $V = \operatorname{span}(B)$ e per ogni i abbiamo che $\operatorname{span}(B \setminus \{v_i\}) \neq V$. ($B$ è un sistema minimale di generatori)
(iii) B è linearmente indipendente e per ogni $v \in V \setminus B$ abbiamo che $B \cup \{v\}$ è linearmente dipendente. (B è un insieme linearmente indipendente massimale)

DIMOSTRAZIONE. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*. Se per un i l'insieme $B \setminus \{v_i\}$ genera V, allora $v_i \in \operatorname{span}(B \setminus \{v_i\})$. Dalla Proposizione 4.33 segue che in questo caso B deve essere linearmente dipendente. Otteniamo quindi una contraddizione.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*. Se B fosse linearmente dipendente allora esisterebbe un v_i che è una combinazione lineare degli altri v_j. In particolare $\operatorname{span}(B) = \operatorname{span}(B \setminus \{v_i\})$. Questo contraddice le ipotesi $\operatorname{span}(B) = V$ e $\operatorname{span}(B \setminus \{v_i\}) \neq V$.

Sappiamo che $V = \operatorname{span}(B)$. Prendiamo $v \in V \setminus B$. Allora v deve essere in $\operatorname{span}(B)$. Quindi v è una combinazione lineare di vettori di B. Dalla Proposizione 4.33 segue che $B \cup \{v\}$ è linearmente dipendente.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*. Supponiamo ora che B sia lineare indipendente. Dobbiamo mostrare che $\operatorname{span}(B) = V$. Prendiamo $v \in V$. Se $v \in B$ allora $v \in \operatorname{span}(B)$ e abbiamo finito. Altrimenti sappiamo che $B \cup \{v\}$ è linearmente dipendente, cioè esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu$ tali che

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + \mu v = \overrightarrow{0}.$$

Se $\mu = 0$ allora $v_1, \ldots, v_r$ sono linearmente dipendenti. Ma abbiamo assunto che B è linearmente indipendente. Allora $\mu \neq 0$, e

$$v = \frac{-\lambda_1}{\mu} v_1 + \cdots + \frac{-\lambda_r}{\mu} v_r.$$

e $v \in \operatorname{span}(B)$. Quindi $V = \operatorname{span}(B)$ e B è una base. $\square$

Corollario 4.39 (Teorema della scelta della base). *Sia $S \subset V$ un insieme finito di generatori di V. Allora S contiene una base di V. In particolare, ogni spazio vettoriale finitamente generato possiede una base.*

Dimostrazione. Se S è linearmente indipendente allora S è per definizione una base. Supponiamo allora che S sia linearmente dipendente, in particolare esiste un $v \in S$ che è una combinazione lineare di vettori in $S \setminus \{v\}$. Troviamo allora facilmente che $\mathrm{span}(S) = \mathrm{span}(S \setminus \{v\})$. Dopo un numero finito di passi avremo che S è vuoto oppure che S è linearmente indipendente. $\square$

In generale vale

Teorema 4.40. *Ogni spazio vettoriale possiede una base.*

Osservazione 4.41. Per mostrare questo teorema si devono prima risolvere un paio di problemi di fondamenti in matematica, che non vogliamo affrontare in questo corso. Per dare un'idea:

Per uno spazio vettoriale si ha sempre che $V = \mathrm{span}(V)$. Quindi il problema è che cominciando con un insieme S tale che $V = \mathrm{span}(S)$ si deve trovare un sottoinsieme $B \subset S$ tale che $\mathrm{span}(B) = V$ e B è linearmente indipendente. La strategia applicata sopra (quando si trova un vettore $v \in S$ che è una combinazione di vettori in $S \setminus \{v\}$ e si continua con $S' = S \setminus \{v\}$ iterando fino ad ottenere che nessuno dei vettori in S' sia una combinazione degli altri) non è garantita funzionare, perchè si potrebbe dover togliere un numero infinito di vettori. Quindi la domanda è se ci sia un limite a questo procedimento. La risposta è affermativa e segue dal "lemma di Zorn", che in pratica dice che sotto certe ipotesi si può fare questo tipo di procedimenti infiniti senza dover utilizzare nozioni problematiche come "l'insieme di tutti gli insiemi".

Ora presenteremo due risultati tecnici riguardanti il concetto di base.

Lemma 4.42 (Lemma dello scambio). *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base e sia $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Se $\lambda_k \neq 0$ allora $B' := \{v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ è un'altra base di V.*

Dimostrazione. Dopo aver scambiato l'ordine in B possiamo assumere che $k = 1$.

Cominciamo col mostrare che B' è linearmente indipendente. Prendiamo

$$\mu w + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n = \overrightarrow{0}.$$

Sostituendo $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ otteniamo

$$\mu\lambda_1 v_1 + (\mu_2 + \mu\lambda_2)v_2 + (\mu_3 + \mu\lambda_3)v_3 + \cdots + (\mu_n + \mu\lambda_n)v_n = \overrightarrow{0}.$$

I v_i sono linearmente indipendenti e quindi

$$\mu\lambda_1 = \mu_2 + \mu\lambda_2 = \cdots = \mu_n + \mu\lambda_n = 0.$$

Dalla prima equazione segue che $\mu\lambda_1 = 0$. Abbiamo assunto che $\lambda_1 \neq 0$ e quindi, $\mu = 0$. Sostituendolo troviamo

$$\mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$$

e che B' è linearmente indipendente.

Per mostrare che $\mathrm{span}(B') = V$, si nota che $v_2, \dots, v_n \in B'$, se $v_1 \in \mathrm{span}(B')$ allora troviamo che $B \subset \mathrm{span}(B')$ e

$$V = \mathrm{span}(B) \subset \mathrm{span}(B') \subset V$$

e quindi $\mathrm{span}(B') = V$. Adesso

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1}(w - \lambda_2 v_2 - \dots \lambda_n v_n)$$

e $v_1 \in \mathrm{span}(B')$. □

TEOREMA 4.43 (Teorema dello scambio di Steinnitz). *Sia* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base di uno spazio vettoriale* V *e siano* $w_1, \ldots, w_k$ *linearmente indipendenti. Allora*

(1) $k \leq n$ *e*
(2) si possono rinumerare i v_i *in modo che*

$$\{w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$$

sia una base di V.

DIMOSTRAZIONE. Questo teorema si dimostra per induzione. Cioè iniziamo mostrando il risultato nel caso $k = 1$. Poi mostreremo che, se il teorema vale per $k-1$, allora vale anche per k.

Per $k = 1$ il risultato segue dal lemma precedente.

Adesso assumiamo il risultato per $k-1$.

I vettori $w_1, \ldots, w_k$ sono linearmente indipendenti. Allora anche $w_1, \ldots, w_{k-1}$ sono linearmente indipendenti. Sapendo che il risultato vale per $k-1$, dopo una rinumerazione degli v_i troviamo che

$$B' = \{w_1, \ldots, w_{k-1}, v_k, \ldots, v_n\}$$

è una base di V.

Inoltre sappiamo per induzione che $k-1 \leq n$. Se fosse $k-1 = n$ allora $B^* := \{w_1, \ldots, w_{k-1}\}$ sarebbe una base di V. In particolare, $w_k \in \mathrm{span}(w_1, \ldots, w_{k-1})$. Quindi $\{w_1, \ldots, w_k\}$ sono linearmente dipendenti (Proposizione 4.33). Questo contraddice la nostra ipotesi su $\{w_1, \ldots, w_k\}$. Quindi $k-1 < n$ e $k \leq n$.

Utilizzando l'ipotesi e il fatto che B' è una base di V si possono determinare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che

$$w_k = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{k-1} w_{k-1} + \lambda_k v_k + \cdots + \lambda_n v_n$$

Se $\lambda_i = 0$ per ogni $i \in \{k, \ldots, n\}$ allora $w_k \in \mathrm{span}(w_1, \ldots, w_{k-1})$ che contraddice l'indipendenza lineare.

Quindi $\lambda_i \neq 0$ per almeno un $i \geq k$. Rinumerando i v_j si può assumere che $\lambda_k \neq 0$. Il lemma precedente ci dice che possiamo scambiare w_k e v_k e ottenere nuovamente una base. Quindi

$$\{w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$$

è una base. □

COROLLARIO 4.44. *Sia* V *uno spazio vettoriale finitamente generato. Allora ogni base di* V *è finita.*

DIMOSTRAZIONE. Se V è finitamente generato, allora V possiede una base finita. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base finita. Supponiamo ora che B' sia una base infinita. Possiamo allora determinare dei vettori $w_1, \ldots, w_{n+1} \in B'$ che sono linearmente indipendenti. Questo contraddice il Teorema dello scambio (Teorema 4.43). □

COROLLARIO 4.45. *Sia* V *uno spazio vettoriale finitamente generato. Allora ogni due basi di* V *hanno lo stesso numero di elementi.*

DIMOSTRAZIONE. Siano B e B' basi di V. Allora B e B' sono finite. Scriviamo $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ and $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$.

Usando che B è linearmente indipendente e B' una base troviamo $k \leq n$.

Usando che B' è linearmente indipendente e B una base troviamo $n \leq k$. Quindi $k = n$. □

DEFINIZIONE 4.46. Sia V uno spazio vettoriale allora $\dim V = \infty$ se V non è finitamente generato. Se V è finitamente generato allora $\dim V$ è il numero di vettori in una base di V.

ESEMPIO 4.47. La base canonica è una base di $\mathbf{R}^n$. Quindi $\dim \mathbf{R}^n = n$.

L'insieme $\{1, x, x^2, \ldots, x^d\}$ è una base di $\mathbf{R}[x]_{\leq d}$. Quindi $\dim \mathbf{R}[x]_{\leq d} = d + 1$. Invece $\dim \mathbf{R}[x] = \infty$.

Lo spazio vettoriale $M_{m\times n}(\mathbf{R})$ ha dimensione mn.

TEOREMA 4.48 (Teorema di completamento ad una base). *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato, e siano $w_1, \ldots, w_r \in V$ linearmente indipendenti. Allora esistono $w_{r+1}, \ldots, w_n \in V$ tali che*

$$B = \{w_1, \ldots, w_n\}$$

è una base di V.

DIMOSTRAZIONE. Sia $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un insieme di generatori di V. Allora segue dal teorema della scelta della base che S contiene una base B' di V. Il teorema della scambio implica che si possono rinumerare i v_i in modo che $\{w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ sia una base di V. □

PROPOSIZIONE 4.49. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato di dimensione n. Sia S un insieme finito. Allora sono equivalenti*

(1) S è una base;
(2) S è linearmente indipendente e S è formato da n vettori;
(3) $\operatorname{span}(S) = V$ e S è formato da n vettori.

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo con mostrare che (1) implica (2) e (3). Se S è una base, allora S ha n elementi, ed è linearmente indipendente (cioè (2)) e $\operatorname{span}(S) = V$ (cioè (3)).

Adesso dimostriamo l'implicazione (2) $\Rightarrow$ (1). Sappiamo che S è linearmente indipendente e ha n elementi. Dal teorema di completamento ad una base segue che possiamo estendere S ad una base B. Dai fatti che ogni base ha n elementi e $S \subset B$ segua che $S = B$.

Per mostrare che il terzo punto implica il primo, notiamo che se $\operatorname{span}(S) = V$ allora per il Teorema della scelta della base (Corollario 4.39) troviamo che S contiene un sottoinsieme B che è una base di V. Abbiamo visto che ogni base contiene n elementi. Dal fatto che S ha n elementi segue che $S = B$ e S è una base. □

OSSERVAZIONE 4.50. Per completezza vogliamo ricordare che se S è una sistema di generatori di V, allora S contiene una base di V e quindi S ha almeno $\dim V$ elementi.

Similmente, il teorema dello scelta implica che ogni insieme linearmente indipendente ha al massimo $\dim V$ elementi.

PROPOSIZIONE 4.51. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia U un sottospazio di V. Allora $\dim U \leq \dim V$. Inoltre, $\dim U = \dim V$ se e solo se $U = V$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia B una base di U. Allora B è un sottoinsieme di V, linearmente indipendente, quindi dal teorema dello scambio segue che B ha al massimo $\dim V$ elementi e

$$\dim U = \#B \leq \dim V.$$

Se B ha precisamente $\dim V$ elementi allora B è anche una base di V per la proposizione precedente e quindi $V = \operatorname{span}(B) = U$. □

5. Rango di una matrice

DEFINIZIONE 4.52. Sia $A \in M_{m\times n}(K)$. Allora le colonne di A sono vettori in K^m. Definiamo *lo spazio delle colonne di* A il sottospazio generato dalle colonne di A. Similmente, possiamo considerare le righe come vettori in K^n. Definiamo *lo spazio delle righe di* A come il sottospazio generato dalle righe di A.

Chiamiamo *il rango per colonne di* A la dimensione dello spazio delle colonne di A, e lo denotiamo $\operatorname{rg}_c A$. Chiamiamo *il rango per righe di* A la dimensione dello spazio delle righe di A, e lo denotiamo $\operatorname{rg}_r A$.

ESEMPIO 4.53. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$
Allora lo spazio delle colonne di A è generato da
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$
Lo spazio delle righe è di A generato da
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
Si controlla facilmente che entrambi gli spazi hanno dimensione 2.

Il primo risultato che vogliamo mostrare è che il rango per colonne di A è uguale al rango per righe di A.

Cominciamo col mostrare l'effetto sullo spazio delle righe di una operazione elementare sulle righe.

PROPOSIZIONE 4.54. *Sia A una matrice $m \times n$ e sia A' una matrice ottenuta da A applicando una operazione elementare sulle righe, allora gli spazi delle righe di A e di A' coincidono.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $v_1, \ldots, v_m$ le righe di A. È chiaro che scambiando due vettori oppure moltiplicando un vettore con uno scalare, allora i due insiemi generano lo stesso spazio vettoriale.

Per la terza operazione dobbiamo confrontare per $\lambda \in K$ e $1 \le i, j \le m$, $i \ne j$, gli spazi vettoriali
$$V_1 := \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m) \text{ e } V_2 := \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j + \lambda v_i, \ldots, v_m)$$
Dal fatto che $v_i + \lambda v_j \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m)$, segue che $V_2 \subset V_1$. Sommando adesso $-\lambda$ volte la riga i di A' sulla riga j di A' troviamo una matrice A'' con spazio delle righe V_3. Similmente come sopra troviamo che $V_3 \subset V_2$. Adesso si nota che $A'' = A$ e quindi $V_3 = V_1$ e
$$V_1 = V_3 \subset V_2 \subset V_1$$
Cioè V_1 e V_2 coincidono. □

Per lo spazio delle colonne la situazione è più complicata:

ESEMPIO 4.55. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Se si somma la prima riga alla seconda si trova
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Lo spazio delle colonne di A è generato da $(1,1)^T$ e quello di A' da $(1,2)^T$. In particolare i due spazi sono diversi ma hanno la stessa dimensione.

Proposizione 4.56. *Le operazioni elementari sulle righe di A non cambiano la dimensione dello spazio delle colonne di A.*

Dimostrazione. Le operazioni sulle righe corrispondono a moltiplicare A a sinistra con una matrice elementare.

Sia r il rango delle colonne di A. Dal Lemma della scelta della base segue che ci sono colonne $c_1, \ldots, c_r$ di A che sono linearmente indipendenti. Sia B la matrice con colonne $c_1, \ldots, c_r$.

Sia E una matrice elementare. Le colonne della matrice EA che corrispondono alle colonne $c_1, \ldots, c_r$ di A sono esattamente le colonne di EB.

Una combinazione lineare delle colonne di EB equivale a trovare un vettore $v \in K^r$, tale che $(EB).v = \overrightarrow{0}$. In questo caso $E^{-1}EBv = \overrightarrow{0}$, e quindi $Bv = \overrightarrow{0}$. Dal fatto che le colonne di B sono linearmente indipendenti segue che $v = \overrightarrow{0}$ e che le colonne di EB sono linearmente indipendenti. In particolare $\mathrm{rg}_c(A) \leq \mathrm{rg}_c(EA)$. Anche la matrice E^{-1} corrisponde anche ad una operazione sulle colonne e $\mathrm{rg}_c(A) = \mathrm{rg}_c((E^{-1}E)(A)) = \mathrm{rg}_c(E^{-1}(EA)) \geq \mathrm{rg}_c(EA) \geq \mathrm{rg}_c(A)$. Quindi $\mathrm{rg}_c(A) = \mathrm{rg}_c(EA)$ ed il rango è quindi invariante. □

Proposizione 4.57. *Sia A una matrice $m \times n$. Allora il rango delle colonne di A e il rango delle righe di A coincidono e sono uguali al numero di pivot di una forma a scala di A.*

Dimostrazione. Sappiamo che le operazioni elementari sulle righe non cambiano il rango delle colonne e il rango delle righe. Ci siamo così ridotti a calcolare i ranghi per una matrice in forma a scala ridotta.

Sia r il numero di pivot. Allora lo spazio delle righe è generato da r vettori, ed è chiaro che questi sono linearmente indipendenti. Utilizzando che abbiamo la forma ridotta sappiamo che i vettori $e_1, \ldots, e_r$ sono nello spazio delle colonne e il rango delle colonne è almeno r. D'altro canto sappiamo che ogni colonna ha gli ultimi $n - r$ elementi uguali a zero, cioè lo spazio delle colonne è contenuto nello spazio generato da $e_1, \ldots, e_r$ ed il rango delle colonne è al massimo r. Quindi anche il rango delle colonne è r. □

In particolare da ora in poi denoteremo $\mathrm{rg}_c(A) = \mathrm{rg}_r(A)$ con $\mathrm{rg}(A)$ e lo chiameremo *rango* della matrice A.

Corollario 4.58. *Sia A una matrice $m \times n$. Allora* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$.

Dimostrazione. Si ricorda che lo spazio delle colonne di A è lo spazio delle righe di A^T. Quindi il rango delle colonne di A è uguale a il rango delle righe di A^T e quindi il rango di A è il rango di A^T. □

Esempio 4.59. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Allora

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una forma a scala di A. (Vedi Esempio 1.13.) Quindi il rango di A è 3.

6. Sottospazi di K^n

Nell'esempio 4.16 abbiamo mostrato che per ogni matrice $A \in M_{m\times n}(K)$ l'insieme $V := \mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0})$ è un sottospazio di K^n. Il sistema di equazioni associato ad A è

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Questo sistema viene detto un *sistema di equazioni cartesiane* per V.

Dare le equazioni cartesiane è un modo per rappresentare un sottospazio di K^n. Un altro modo è quello di dare equazioni parametriche. Vedremo che entrambe le scritture sono utili in contesti diversi.

Dare *equazioni parametriche* per V è possibile quando V è descritto come $V = \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_r)$ con $v_i \in K^n$. Allora

$$V = \{t_1v_1 + \cdots + t_rv_r \mid t_1, \ldots, t_r \in K\}.$$

Scriviamo adesso $v_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})^T$. Allora possiamo scrivere V come

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} t_1a_{11} + t_2a_{12} + \cdots + t_ra_{1r} \\ t_1a_{21} + t_2a_{22} + \cdots + t_ra_{2r} \\ \vdots \\ t_1a_{n1} + t_2a_{n2} + \cdots + t_{1r}a_{nr} \end{pmatrix} \middle| \, t_1, t_2, \ldots, t_r \in K \right\}$$

Esempio 4.60. Sia $v_1 = (1, 2, 2, 1)$ e $v_2 = (3, 5, 1, 2)$. Allora $V = \mathrm{span}(v_1, v_2)$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} t_1 + 3t_2 \\ 2t_1 + 5t_2 \\ 2t_1 + t_2 \\ t_1 + 2t_2 \end{pmatrix} \middle| \, t_1, t_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

6.1. Da equazioni parametriche a equazioni cartesiane. Se uno spazio vettoriale è dato in modo parametrico, allora è possibile determinarne le equazioni cartesiane. Scriviamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_1 & = & t_1a_{11} + t_2a_{12} + \cdots + t_ra_{1r} \\ x_2 & = & t_1a_{21} + t_2a_{22} + \cdots + t_ra_{2r} \\ \vdots & & \\ x_n & = & t_1a_{n1} + t_2a_{n2} + \cdots + t_ra_{nr} \end{cases}$$

Adesso si cerca di eliminare i t_i, cioè, cerchiamo di risolvere prima per $t_1, \ldots, t_r$ e di sostituire le soluzioni in modo che si rimanga solamente con equazioni in $x_1, \ldots, x_n$.

Esempio 4.61. (cont.)

$$\begin{cases} x_1 & = & t_1 + 3t_2 \\ x_2 & = & 2t_1 + 5t_2 \\ x_3 & = & 2t_1 + t_2 \\ x_4 & = & t_1 + 2t_2 \end{cases}$$

La prima equazione dà $t_1 = x_1 - 3t_2$. Sostituendo questo dà

$$\begin{cases} t_1 & = & x_1 - 3t_2 \\ x_2 & = & 2x_1 - t_2 \\ x_3 & = & 2x_1 - 5t_2 \\ x_4 & = & x_1 - t_2 \end{cases}$$

La seconda equazione dà $t_2 = 2x_1 - x_2$. Sostituendo questo nelle ultime due equazioni otteniamo

$$\begin{cases} x_3 &= -8x_1 + 5x_2 \\ x_4 &= -x_1 + x_2 \end{cases}$$

Quindi $8x_1 - 5x_2 + x_3 = x_1 - x_2 + x_4 = 0$ è un sistema di equazioni cartesiane di V.

Una riformulazione di questa idea più strutturata è la seguente. Cominciamo con

$$t_1v_1 + t_2v_2 + \cdots + t_rv_r = x$$

dove $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Adesso possiamo riscrivere il sistema

$$t_1v_1 + t_2v_2 + \cdots + t_rv_r - x = \overrightarrow{0}.$$

Questo è un sistema di equazioni lineari in $t_1, \ldots, t_r, x_1, \ldots, x_n$. Si controlla facilmente che la matrice dei coefficienti di questo sistema è

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_r & -I_n \end{pmatrix}$$

Risulta quindi che le prime r colonne sono i v_i e le ultime n colonne sono la matrice $-I_n$. Sia A' una forma a scala di A. Nelle prime righe si troveranno i pivot in colonne che corrispondono ai t_i. Le corrispondenti equazioni esprimono t_i in funzione dei t_j con $j > i$ e gli x_k. Si controlla facilmente che i numero di equazioni di questo tipo è uguale a $\dim V$.

Le ultime righe, hanno i pivot in colonne che corrispondono agli x_k. Queste equazioni daranno le equazioni cartesiane per V. Nel prossimo capitolo mostreremo che si devono trovare $n - \dim V$ equazioni di questo tipo.

In questo modo possiamo trovare delle equazioni cartesiane per un sottospazio generato dai vettori $v_1, \ldots v_r$.

Metodo alternativo

Se abbiamo una base B per uno sottospazio vettoriale V di K^n, sappiamo che un qualsiasi vettore $v \in K^n$ è contenuto in V se e solo se $B \cup \{v\}$ è linearmente dipendente. Possiamo quindi determinare le equazioni del sottospazio V imponendo la dipendenza lineare di un generico vettore di K^n con gli elementi della base di V. Vediamolo in un esempio.

Esempio 4.62. (cont.) Sia $v_1 = (1, 2, 2, 1)$ e $v_2 = (3, 5, 1, 2)$. Sia $V = \operatorname{span}(v_1, v_2)$. Vogliamo imporre che un generico vettore $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in K^n$ sia linearmente dipendente da v_1 e v_2. Questo equivale a richiedere che la matrice

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v \end{pmatrix}$$

abbia rango 2. In particolare otteniamo che

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

ottenendo, dopo da riduzione in forma a scala,

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 8x_1 - 5x_2 + x_3 & x_1 - x_2 + x_4 \end{pmatrix}.$$

In particolare la matrice B' ha rango 2 se e solo se $8x_1 - 5x_2 + x_3 = x_1 - x_2 + x_4 = 0$, ottenendo le stesse equazioni ricavate col metodo precedente.

Esiste ovviamente anche la procedura inversa, cominciando con un sistema di equazioni lineari che definiscono un sottospazio, dà generatori (infatti dà una base) per lo spazio.

6.2. Da equazioni cartesiane a equazioni parametriche. Sia A la matrice dei coefficienti delle sistema di equazioni cartesiani che definiscono V. Allora possiamo trovare A' una forma a scala ridotta. Se $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ sono le incognite determinate e $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ sono le incognite libere allora possiamo scrivere il sistema $A'x = \overrightarrow{0}$ in modo

$$\begin{cases} x_{i_1} & = & b_{11}x_{j_1} + b_{12}x_{j_2} + \ldots b_{1k}x_{j_k} \\ x_{i_2} & = & b_{21}x_{j_1} + b_{22}x_{j_2} + \ldots b_{2k}x_{j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{i_r} & = & b_{r1}x_{j_1} + b_{r2}x_{j_2} + \ldots b_{rk}x_{j_k} \end{cases}$$

Per $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ possiamo scegliere parametri $t_1, \ldots, t_k$ e troviamo delle equazioni parametriche.

Esempio 4.63. Vogliamo trovare generatori per $\mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0})$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Allora

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una forma a scala. La forma ridotta è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $x_1 + \frac{31}{2}x_4 - 2x_5 = 0$, $x_2 - \frac{1}{2}x_4 = 0$ e $x_3 - 3x_4 = 0$.

Le incognite x_4 e x_5 sono libere. Dichiamo che $x_4 = t_1$, $x_5 = t_2$. Allora troviamo che

$$\mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0}) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-31}{2}t_1 + 2t_2 \\ \frac{1}{2}t_1 \\ 3t_1 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

Possiamo riscrivere

$$\begin{pmatrix} \frac{-31}{2}t_1 + 2t_2 \\ \frac{1}{2}t_1 \\ 3t_1 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} \frac{-31}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0}) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} \frac{-31}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

7. Intersezione e somma di spazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale e siano U, W sottospazi. Allora

Lemma 4.64. *L'intersezione $U \cap W$ è un sottospazio.*

Dimostrazione. Dal fatto che U e W sono sottospazi segue che $\overrightarrow{0} \in U, W$. Quindi $\overrightarrow{0} \in U \cap W$.

Se $v_1, v_2 \in U \cap W$. Allora $v_1, v_2 \in U$. Dal fatto che U è un sottospazio segue che per ogni $\lambda \in K$ abbiamo $v_1 + \lambda v_2 \in U$. Similmente abbiamo che per ogni $\lambda \in K$ il vettore $v_1 + \lambda v_2 \in W$. Quindi $v_1 + \lambda v_2 \in U \cap W$ e $U \cap W$ è un sottospazio. $\square$

In generale $U \cup W$ non è un sottospazio. Invece il sottospazio più piccolo che contiene U e W è

$$\operatorname{span}(U \cup W).$$

Questo spazio è generato dagli elementi di U e di W. Per due insiemi $S_1, S_2 \subset V$ si può definire

$$S_1 + S_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in S_1, v_2 \in S_2\}.$$

Lemma 4.65. *Siano U, W sottospazi di V. Allora U e W sono contenuti in $U + W$*

Dimostrazione. Sia $u \in U$. Dal fatto che $\overrightarrow{0} \in W$ segue che $u + \overrightarrow{0} \in U + W$. Quindi $u \in U + W$ per ogni $u \in U$. Similmente di vede che $W \subset U + W$. $\square$

Lemma 4.66. *Si ha*

$$\operatorname{span}(U \cup W) = U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

Dimostrazione. Gli elementi di $U + W$ sono combinazioni lineari di elementi di U e di W. Quindi $U + W \subset \operatorname{span}(U \cup W)$. Dal lemma precedente sappiamo che $U \cup W \subset U + W$. Si controlla facilmente che $U + W$ è un sottospazio. Quindi $U + W$ è un sottospazio che contiene $U \cup W$, quindi contiene anche il sottospazio più piccolo che contiene $U \cup W$, che è $\operatorname{span}(U \cup W)$. Allora, $\operatorname{span}(U \cup W) \subset U + W$. Insieme all'altra inclusione troviamo che $\operatorname{span}(U \cup W) = U + W$. $\square$

Siano ora $U, W \subset \mathbf{R}^n$. Come riusciamo a determinare esplicitamente $U + W$ e $U \cap W$?

Per trovare $U + W$ la cosa più semplice è quella di trovare prima le basi $\{u_1, \dots, u_k\}$ di U e $\{w_1, \dots, w_m\}$ di W. In questo caso $\{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m\}$ genera $U + W$ e contiene una base di $U + W$.

Ora vedremo un metodo semplice per determinare le relazioni tra questi vettori. In generale, siano $v_1, \dots, v_r \in \mathbf{R}^n$. Cominciamo con la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} v_1 & \\ v_2 & \\ v_3 & I_r \\ \vdots & \\ v_r & \end{array}\right).$$

Quindi le righe a sinistra sono i vettori v_i scritti come vettori di righe e a destra c'è la matrice I_r. Si applica adesso Gauß e si trovano due matrici

$$(A|B)$$

Dove A è in forma a scala. Se A non contiene righe costituite da soli zeri, allora il rango dello spazio generato dai v_i è r, quindi i v_i sono linearmente indipendenti.

Altrimenti, ogni riga che consiste di zeri dà una relazione tra i v_i. Abbiamo inoltre che B è la matrice che corrisponde al procedimento di Gauß. Quindi

$$B\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix} = A$$

Dalla definizione del prodotto di matrici si trova che la riga i-esima di A è uguale a

$$B_i\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}$$

dove B_i è la riga i-esima di B. Quindi se la riga i di A è $\overrightarrow{0}$ allora

$$B_{i1}v_1 + B_{i2}v_2 + \cdots + B_{ir}v_r = \overrightarrow{0}$$

e abbiamo trovato una relazione. In questo modo possiamo isolare un v_i, che si può quindi esprimere come combinazione degli altri.

Esempio 4.67. Consideriamo il sottospazio V generato da $v_1 := (3,-1,4), v_2 := (2,-2,1), v_3 := (0,4,5)$ e $v_4 := (-1,3,2)$. Applicando il procedimento di Gauß a

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 3 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

dà

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Quindi, dal fatto che il procedimento di Gauß non cambia lo spazio delle righe, segue che V è generato da $w_1 = (-1,3,2)$ e $w_2 = (0,4,5)$. Inoltre la prima riga dice che $w_1 = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 1v_4 = v_4$, la seconda riga dà che $w_2 = v_2 + 2v_4$, la terza riga dà $-v_2 + v_3 - 2v4 = \overrightarrow{0}$ e l'ultima riga dà $v_1 - 2v_2 + v_4 = \overrightarrow{0}$. Quindi $v_1, v_3 \in \operatorname{span}(v_2, v_4)$ e $V = \operatorname{span}(v_2, v_4)$.

Per trovare $U \cap W$ è invece più utile trovare equazioni cartesiane per U e per W. Queste equazioni, prese insieme, sono le equazioni per $U \cap W$.

Esempio 4.68. Sia U dato da $x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0$ e $x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Sia W dato da $3x_1 - x_2 + 8x_3 - 13x_4 = 0$ e $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Allora $U \cap W$ è definito dalle quatro equazioni. Quindi

$$U \cap W = \operatorname{Sol}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 8 & -13 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{0}\right).$$

Applicando Gauß si trova che

$$U \cap W = \operatorname{Sol}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{0}\right).$$

Quindi $x_1 = 0$, $x_3 = 4/3x_4$ e $x_2 = -7/3x_4$. Una base per $U \cap V$ è $\{(0, -7, 4, 3)\}$.

PROPOSIZIONE 4.69 (Formula di Grassmann). *Siano U e W sottospazi di dimensione finita di uno spazio vettoriale V. Allora*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base di $U \cap W$. Allora la possiamo estendere ad una base $\{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s\}$ di U e una base $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_t\}$ di W.

L'unione delle basi genera $U + W$, quindi $\{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_t\}$ genera $U + W$. Adesso mostriamo che è anche linearmente indipendente: Assumiamo che

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_s u_s + \nu_1 w_1 + \cdots + \nu_t w_t = \overrightarrow{0}$$

Allora,

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_s u_s = -(\nu_1 w_1 + \cdots + \nu_t w_t).$$

La parte a destra è un vettore di W, la parte a sinistra è un vettore in U. Quindi ambo due i lati sono in $U \cap W$ e

$$-(\nu_1 w_1 + \cdots + \nu_t w_t) \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_r)$$

Similmente otteniamo che

$$-(\mu_1 u_1 + \cdots + \mu_s u_s) \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_r).$$

Questo implica che ci sono $\xi_1, \ldots, \xi_r$ tali che

$$-(\nu_1 w_1 + \cdots + \nu_t w_t) = \xi_1 v_1 + \cdots + \xi_r v_r.$$

Quindi

$$\xi_1 v_1 + \cdots + \xi_r v_r + \nu_1 w_1 + \cdots + \nu_t w_t = \overrightarrow{0}.$$

Si nota che $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_t\}$ è una base di W, quindi è linearmente indipendente e troviamo che tutti gli ξ_i e tutti gli ν_i sono zero. Similmente, otteniamo che gli μ_i sono tutti zero e rimaniamo quindi con

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = \overrightarrow{0}$$

Anche i v_i sono linearmente indipendenti e quindi anche i λ_i sono zero. Così

$$\{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s, w_1, \ldots, w_t\}$$

è una base di $V + W$, e $\dim V + W = r + s + t$. Adesso sappiamo anche che $\dim U = r + s$, $\dim V = r + t$ e $\dim U \cap V = r$ e troviamo

$$\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W.$$

$\square$

DEFINIZIONE 4.70. Diciamo che due sottospazi di U, W di uno spazio vettoriale sono *in somma diretta* se $U \cap W = \{\overrightarrow{0}\}$. In questo caso scriviamo $U \oplus W$ per $U + W$.

Dalla formula di Grassmann segue che se U e W sono in somma diretta allora $\dim U \oplus W = \dim U + \dim W$.

LEMMA 4.71. *Siano U, W sottospazi in somma diretta. Allora ogni $v \in U \oplus W$ si può scrivere come $v = u + w$, con $u \in U$, $w \in W$ in modo unico.*

DIMOSTRAZIONE. Per definizione, ogni vettore in $U + W = U \oplus W$ si può scrive come $u + w$, con $u \in U$, $w \in W$. Il punto è mostrare che la scrittura è unica. Sia $u' + w'$ un altro modo per scrivere v. Allora

$$\overrightarrow{0} = v - v = (u + w) - (u' + w') = (u - u') + (w - w')$$

Allora abbiamo $u - u' = w' - w$. La parte a sinistra sta in U, la parte a destra sta in W. Quindi ambo i due lati stanno in $U \cap W$. Dal fatto che U e W sono in somma diretta adesso segue che $U \cap W = \{\overrightarrow{0}\}$. E possiamo quindi dedurre che $u - u' = w' - w = \overrightarrow{0}$. Allora $u = u'$ e $w = w'$ e la scrittura è quindi unica. $\square$

Esempio 4.72. Prendiamo $u, w \in \mathbf{R}^n$. Allora $U = \mathrm{span}(u)$ e $W = \mathrm{span}(w)$ definiscono due rette in $\mathbf{R}^n$, passanti per l'origine. L'intersezione $U \cap W$ ha dimensione al massimo 1. Se ha dimensione uno allora $U \cap W = U$ e $U \cap W = W$, quindi $U = W$, e le rette coincidono. Altrimenti abbiamo $\dim U \cap W = 0$ e U e W sono in somma diretta.

In questo caso abbiamo che $U \oplus W = \mathrm{span}(u, w)$ ha dimensione 2, e definisce un piano in $\mathbf{R}^n$.

Esempio 4.73. Siano U, W sottospazi di K^n di dimensione m, p. Se $m + p > n$ allora U e W non sono in somma diretta:

Da la formula di Grassmann segue:

$$\dim U \cap W = \dim U + \dim W - \dim U + W \geq \dim U + \dim W - \dim K^n = m + p - n > 0$$

Esempio 4.74. Sia $V = \mathrm{span}((1,1,1),(1,2,0)) \subset \mathbf{R}^3$. Se W è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ che è in somma diretta con V, allora $\dim W \leq 1$. Sia ora W tale che $\dim W = 1$. Se $W = \mathrm{span}(w)$, allora $W \cap V \neq \{\overrightarrow{0}\}$ se e solo $\dim W \cap V > 0$. Da $\dim W \cap V \leq \dim W = 1$, e questo succede se $W \subset V$, quindi, se $w \in V$.

Se $w \notin V$ allora V e W sono in somma diretta. In questo caso $\dim U \oplus W = \dim U + \dim W = 2 + 1 = 3$. Quindi $U \oplus W = \mathbf{R}^3$.