Appello di Geometria
2^A sessione recupero AA 2014/15

CdL in Astronomia, CdL in Fisica
18 settembre 2015

Non consegnare brutte copie. Consegnare solo questi fogli. Risposte brevi, ma ben giustificate.

Cognome	Nome	Matricola

Es. 1 (11 pt)	Es. 2 (11 pt)	Es. 3 (11 pt)	Totale (33 pt)	Orale	Finale

Esercizio 1. Nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^5$ con coordinate $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, si considerino i due piani π e σ di equazioni

$$\pi : \begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}, \quad \sigma : \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

Sia σ° lo spazio direttore di σ e π° quello di π.

a) (3pt) Dimostrare che effettivamente π e σ sono piani calcolando la dimensione e una base di π° e di σ°.

$\pi^\circ = \langle(1, -1, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\rangle$, $\sigma^\circ = \langle(0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 1)\rangle$.

b) (3pt) Determinare la posizione reciproca di π e σ.

Sono sghembi. Difatti si vede subito che $\sigma \cap \pi = \emptyset$. Per mostrare che $\pi^\circ \cap \sigma^\circ = (0)$, si può mostrare che il rango della matrice del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \end{cases},$$

vale 5. In alternativa, si può mostrare che $\dim(\pi^\circ + \sigma^\circ) = 4$, il che si vede perché i 4 vettori delle basi di π° e σ° sono linermente indipendenti (la loro matrice ha rango 4).

c) (2pt) Senza calcoli, sapreste dire quanti punti $P \in \pi$ e $Q \in \sigma$ esistono tali che la distanza $d(P, Q) = ||P - Q||$ sia minima possibile? E perché?

d) (3pt) Determinare un versore $\vec{t}$, $\perp$ sia a π che a σ. Poi si prendano un punto qualunque $P \in \pi$ e un punto $Q \in \sigma$. Quanto vale la distanza di π da σ?

Prima si determina un versore $\vec{t}$, $\perp$ sia a π che a σ. È unico a meno del segno. È $\vec{t} = \pm(0, -1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0)$. Poi si prende un punto $P \in \pi$, per esempio $P = (-1, 0, 1, 1, 0)$ e un punto $Q \in \sigma$, per esempio $Q = (2, 0, 0, 0, 0)$. Allora il prodotto scalare $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{t} = 1/\sqrt{2}$ dà la distanza.

Esercizio 2. Si consideri la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a) (2pt) Calcolare il polinomio caratteristico di A.
È $x^3 - 3x - 2$

b) (3pt) Calcolare gli autovalori di A con le relative molteplicità. (Suggerimento: -1 è uno zero del polinomio caratteristico.)
Il polinomio caratteristico è $(x+1)^2(x-2)$.

c) (3pt) Trovare una base di ciascun autospazio di A.
$\ker(A+1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$, $\ker(A-2) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

d) (3pt) Trovare una matrice ortogonale che diagonalizza A.
Si ortogonalizza la base di $\ker(A+1) = \langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \rangle$, e quella di $\ker(A-2) = \langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \rangle$. Poi si pone

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

si ha che

$$AP = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Siccome P è ortogonale $P^{-1} = P^t$ e

$$P^t AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$ con coordinate ortonormali (x, y, z) e versori base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si consideri il piano π di equazione $2x + y - z = 1$ e sia π° il suo spazio direttore. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \pi$ la proiezione ortogonale, vista come applicazione affine di applicazione lineare associata $\varphi^\circ : \mathbb{R}^3 \to \pi^\circ$.

a) (2 pt) Si determinino i due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ di π° aventi proiezione ortogonale $\vec{i}$ e $\vec{j}$, rispettivamente, sul piano $z = 0$.
Si tratta dei vettori $\vec{v} = (1, 0, 2)$ e $\vec{w} = (0, 1, 1)$.

b) (3 pt) Si determini il punto $R \in \pi$ di minima distanza da $O(0, 0, 0)$.
È $R = (1/3, 1/6, -1/6)$.

c) (3 pt) Trovare le immagini tramite φ in π dei punti fondamentali del riferimento canonico (O, $P_1 = O + \vec{i}$, $P_2 = O + \vec{j}$, $P_3 = O + \vec{k}$).
si tratta di $\varphi(O) = R = (1/3, 1/6, -1/6)$, $\varphi(P_1) = (2/3, -1/6, 1/6)$, $\varphi(P_2) = (0, 1, 0)$, $\varphi(P_3) = (2/3, 1/3, 2/3)$, rispettivamente.

d) (3 pt) Su π si scelga il riferimento affine $(R, \vec{v}, \vec{w})$. Si determinino le equazioni di φ usando il riferimento canonico su $\mathbb{R}^3$ e $(R, \vec{v}, \vec{w})$ su π.

Le immagini di $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ tramite l'applicazione lineare φ° associata a φ sono, rispettivamente, i vettori $\overrightarrow{R\varphi(P_1)} = (1/3, -1/3, 1/3)$, $\overrightarrow{R\varphi(P_2)} = (-1/3, 5/6, 1/6)$, $\overrightarrow{R\varphi(P_3)} = (1/3, 1/6, 5/6)$. Questi si scrivono come

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R\varphi(P_1)} &= (1/3, -1/3, 1/3) = (1/3)\vec{v} - (1/3)\vec{w} \, , \\ \overrightarrow{R\varphi(P_2)} &= (-1/3, 5/6, 1/6) = -(1/3)\vec{v} + (5/6)\vec{w} \, , \\ \overrightarrow{R\varphi(P_3)} &= (1/3, 1/6, 5/6) = (1/3)\vec{v} + (1/6)\vec{w} \, . \end{aligned}$$

Quindi le equazioni di φ nei riferimenti dati sono

$$\varphi(x, y, z) = R + \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 5/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Esercizio 4. (**Domanda per l'orale**) Si consideri lo spazio affine euclideo $\mathbb{R}^5$ e le sue sottovarietà π, σ di spazi direttori π°, σ°, rispettivamente, con $\dim \pi = 2$, $\dim \sigma = 3$.

a) Supponiamo che sia $\pi^\circ \cap \sigma^\circ = (0)$. Mostrare che π e σ sono incidenti in esattamente 1 punto.

Risposta: Infatti, in questo caso, lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^5 = \pi^\circ \oplus \sigma^\circ$. Allora, prendendo un punto $P \in \pi$ e un punto $Q \in \sigma$, il vettore $\overrightarrow{PQ}$ deve essere somma di un vettore di π° e di uno di σ°, cioè $\overrightarrow{PQ} = u + w$, con $u \in \pi^\circ$ e $w \in \sigma^\circ$. Ma allora, $P + u = P' \in \pi$ e $Q - w = Q' \in \sigma$, e $Q' - P' = \overrightarrow{P'Q'} = (Q - P) - (u + w) = 0$, cioè $P' = Q' \in \pi \cap \sigma$. Dunque π e σ sono incidenti. Se ci fossero due punti distinti $R, S \in \pi \cap \sigma$, il vettore $S - R = \overrightarrow{RS}$ sarebbe in $\pi^\circ \cap \sigma^\circ = (0)$ e dunque sarebbe 0, assurdo.

b) In tutta generalità, è possibile che π e σ siano sghembe? È possibile che π e σ abbiano piani in comune?

Risposta: π e σ non possono essere sghembe. Difatti, se $\pi^\circ \cap \sigma^\circ = (0)$, dal punto precedente si deduce che π e σ sono incidenti in esattamente 1 punto. Invece può benissimo succedere che π e σ abbiano piani in comune. Per esempio quando $\pi \subset \sigma$!

c) Supponiamo che sia $\pi \cap \sigma = \emptyset$ e $\pi^\circ \cap \sigma^\circ = \langle v \rangle$, con $v \neq 0$. È vero che se $P \in \pi$ e $Q \in \sigma$ sono tali che $Q - P = \overrightarrow{PQ}$ sia perpendicolare sia a π che a σ, allora la distanza $d(P, Q)$ è la minima distanza tra un punto di π e un punto di σ? È vero che una tale coppia di punti $P \in \pi$ e $Q \in \sigma$ esiste?

Risposta: Sia $P' = P + u$, con $u \in \pi^\circ$, un altro punto di π e $Q' = Q + w$, con $w \in \sigma^\circ$, un altro punto di σ. Allora $Q' - P' = (Q - P) + (w - u)$. Ma $(Q - P) \perp (w - u)$ e il teorema di Pitagora dice che $||Q' - P'||^2 = ||Q - P||^2 + ||w - u||^2 \geq ||Q - P||^2$, cosicché $||Q' - P'|| \geq ||Q - P||$. Quanto all'esistenza di $P \in \pi$ e $Q \in \sigma$ tali che $Q - P = \overrightarrow{PQ}$ sia perpendicolare sia a π che a σ, basta osservare che $\dim \pi^\circ + \sigma^\circ = 4$. Quindi $(\pi^\circ + \sigma^\circ)^\perp = \langle e \rangle$, con $e \neq 0$ e $\mathbb{R}^5 = (\pi^\circ + \sigma^\circ) \oplus \langle e \rangle$. Allora, per ogni $X \in \pi$ e $Y \in \sigma$, si può decomporre $Y - X = (u + w) + \lambda e$, con $u \in \pi^\circ$, $w \in \sigma^\circ$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Si vede che $P = X + u$, $Q = Y - w$, soddisfa $Q - P = (Y - X) - (u + w) = \lambda e \in (\pi^\circ + \sigma^\circ)^\perp$.

d) Nella situazione di c), descrivere l'insieme dei punti $X \in \pi$ che hanno minima distanza da σ e l'insieme dei punti $Y \in \sigma$ che hanno minima distanza da π.

Risposta: Siano $P \in \pi$ e $Q \in \sigma$ tali che $Q - P = \overrightarrow{PQ}$ sia perpendicolare sia a π che a σ. Voglio mostrare che il luogo degli X è $P + \langle v \rangle$ e il luogo degli Y è $Q + \langle v \rangle$. Si tratta di due rette parallele, una su π e una su σ. Infatti, torniamo alla risposta del punto precedente: se anche i punti $P' = P + u \in \pi$, con $u \in \pi^\circ$ e $Q' = Q + w \in \sigma$, con $w \in \sigma^\circ$, sono tali che la distanza $d(P', Q')$ sia minima, cioè uguale a $d(P, Q)$, si deve avere $||w - u||^2 = 0$, cioè $u = w$. Ma allora questo $u = w$ è un vettore di $\pi^\circ \cap \sigma^\circ = \langle v \rangle$. Quindi è un multiplo di v. E viceversa, se prendiamo $P' = P + \lambda v \in \pi$ e $Q' = Q + \lambda v \in \sigma$, si ha $d(P', Q') = d(P, Q)$.