CAPITOLO 2

Matrici

1. Calcolo delle matrici

Nella discussione della risoluzione di sistemi lineari abbiamo già visto la notazione matriciale. In questo capitolo forniremo tutte le definizioni e proprietà base delle matrici che utilizzeremo in questo corso.

DEFINIZIONE 2.1. Una matrice (reale) $m \times n$ è uno schema di mn numeri scritti in m righe di n numeri.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \ddots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Spesso una matrice sarà solo indicata con $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ o $A = (a_{i,j})$. Gli elementi a_{ij} saranno chiamati gli *elementi* della matrice.

Finora abbiamo utilizzato le matrici per avere un modo più semplice di scrivere un sistema di equazioni lineari e abbiamo esclusivamente applicato operazioni elementari sulle righe. Ora introdurremo altre tre operazione associate alle matrici.

Siano A e B matrici $m \times n$, cioè A e B hanno lo stesso numero di righe e di colonne. Allora definiamo la somma $A + B$ come

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In pratica, la somma di due matrici delle stesse dimensioni è semplicemente la matrice ottenuta sommando gli elementi che appaiono nella stessa posizione.

Per una matrice $m \times n$ A e un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ definiamo il prodotto λA come

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Cioè moltiplichiamo tutti gli elementi della matrice con il numero λ.

Esiste anche un'operazione di prodotto tra due matrici. A prima vista potrebbe sembrare poco intuitivo, ma questa definizione tornerà utile in molte applicazioni.

Sia A una matrice $m \times n$ e B una matrice $n \times p$, cioè il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B. Allora il prodotto AB è una matrice $m \times p$

definita da

$$(AB)_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)$$

Ossia, l'elemento al posto (i, j) viene determinato dalla riga i di A e dalla colonna j di B; si moltiplica il primo elemento della riga i di A con il primo elemento della colonna j di B, il secondo elemento della riga i di A con il secondo elemento della colonna j di B, ecc., e si fa la somma di tutti questi prodotti.

Esempio 2.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

$$5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & 25 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 & 88 \\ 199 & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

Dove $199 = 4 * 11 + 5 * 13 + 6 * 15$.

Esempio 2.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ -8 & 11 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}$$

Esistono due matrici speciali che appariranno molto spesso. La matrice $0 := 0_{m \times n}$ è la matrice con tutti gli elementi zero. La martice I_n è la matrice $n \times n$ tale che

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

che ha tutti 1 nelle posizioni $(i, i)_{i=1,\dots,n}$ e zero altrove.

Proposizione 2.4 (Regole di calcolo con le matrici). *Sia A una matrice $m \times n$.*

(1) Sia B una matrice $m \times n$ allora $A + B = B + A$.
(2) Siano B, C matrici $m \times n$ allora $A + (B + C) = (A + B) + C$
(3) $A + 0 = 0 + A = A$.
(4) Sia B una matrice $n \times p$ e C una matrice $p \times q$ allora $(AB)C = A(BC)$.
(5) $I_m A = A I_n = A$.
(6) Siano B, C matrici $n \times p$ allora $A(B + C) = AB + AC$.
(7) Sia B una matrice $m \times n$, C una matrice $n \times p$ allora $(A+B)C = AC+BC$.

Dimostrazione. Tutti i punti si dimostrano calcolando ambo i lati delle uguaglianze e controllando che ogni elemento sia lo stesso. Ad esempio per la prima regola abbiamo che $A + B$ e $B + A$ sono matrici $m \times n$ e

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

e

$$(B + A)_{ij} = b_{ij} + a_{ij}.$$

Per due numeri reali α, β sappiamo che $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. Quindi $b_{ij} + a_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ per ogni i, j e $(A + B)_{ij} = (B + A)_{ij}$.

Le altre due properietà riguardo la somma si mostrano in modo simile. Le dimostrazioni per le regole del prodotto sono più complicate. Per mostrare la quarta regola, si nota che AB è una matrice $m \times p$ e

$$\begin{aligned}((AB)C)_{ij} &= \sum_{r=1}^{p} (AB)_{ir} C_{r,j} \\ &= \sum_{r=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kr} \right) C_{r,j}\end{aligned}$$

Similmente,

$$\begin{aligned}(A(BC))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik} (BC)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \left(\sum_{r=1}^{p} B_{kr} C_{r,j} \right)\end{aligned}$$

Ed entrambe le espressioni sono uguali a:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{p} A_{ik} B_{kr} C_{r,j}$$

□

Osservazione 2.5. Una regola che sembra mancare è $AB = BA$. Ci sono due ragioni per cui questa regola non appare. La prima è che se A è una matrice $m \times n$ e AB è definita allora B deve essere una matrice $n \times p$. Per poter definire BA abbiamo bisogno che $p = m$, cioè i due prodotti sono definiti contemporaneamente solo quando B è del tipo $n \times m$. In questo caso abbiamo che AB è una matrice $n \times n$ e BA è una matrice $m \times m$. Cioè per avere due matrici della stessa dimensione dobbiamo inoltre imporre $m = n$. Ma anche in questo caso non c'è sempre uguaglianza:

Esempio 2.6. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare, $AB \neq BA$.

Si dice che il prodotto non è commutativo.

2. La matrice inversa

Adesso cominciamo discutendo una properietà che è solo rilevante per matrici quadrate, che sono matrici con lo stesso numero di righe e colonne.

Se prendiamo due matrici quadrate della stessa dimensione, cioè due matrici $n \times n$, allora il loro prodotto è di nuovo una matrice $n \times n$.

Definizione 2.7. Sia A una matrice $n \times n$. Chiamiamo una matrice B tale che

$$AB = BA = I_n$$

una matrice inversa di A. Se tale matrice esiste, diciamo che A è *invertibile.*

Studieremo più avanti alcuni criteri per decidere se una data matrice sia o meno invertibile. Per ora vogliamo studiare alcune proprietà di queste matrici.
Per esempio la matrice inversa, se esiste, è unica:

Proposizione 2.8. *Sia A una matrice invertibile. Siano B e C matrici inverse di A. Allora $B = C$.*

Dimostrazione. Sappiamo che

$$AB = BA = I_n \text{ e } AC = CA = I_n$$

Allora

$$C \overset{(5)}{=} I_n C = (BA)C \overset{(4)}{=} B(AC) = BI_n \overset{(5)}{=} B$$

dove abbiamo applicato le varie regole del calcolo matriciale. □

Quindi la matrice inversa, se esiste, è unica. In questo caso la denoteremo con A^{-1}.

Esempio 2.9. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Se $ad - bc \neq 0$ allora

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Proposizione 2.10. *Siano A e B matrici $n \times n$ e invertibili allora AB è invertibile e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Se A è invertibile allora A^{-1} è anche invertibile e $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Dimostrazione. Vale

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) \overset{(4)}{=} A(BB^{-1})A^{-1} = A(I_n)A^{-1} \overset{(5)}{=} AA^{-1} = I_n$$

e in modo simile per $(B^{-1}A^{-1})(AB)$. Quindi AB è invertibile e la matrice inversa è $B^{-1}A^{-1}$.

Da $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ segue anche che A^{-1} è invertibile con inversa A. □

Adesso vogliamo studiare il rapporto tra moltiplicazione di matrici e operazioni elementari sulle righe.

Definizione 2.11. Chiamiamo le seguenti matrici $n \times n$ *matrici elementari.* Per $1 \leq i < j \leq n$ definiamo

$$P(i,j) := \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 0 &&&& 1 &&& \\ &&& 1 &&&&&& \\ &&&& \ddots &&&&& \\ &&&&& 1 &&&& \\ && 1 &&&& 0 &&& \\ &&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha solo 1 sulla diagonale, con l'eccezione del posto (i,i) e (j,j) dove l'entrata è 0. Fuori dalla diagonale ci saranno solamente entrate con valore 0 con l'eccezione degli elementi in posizione (i,j) e (j,i) dove c'è un 1.

Per $i, j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i, j \leq n$ e $i \neq j$ e un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ definiamo

$$S(i,j;\lambda) := \begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 1 &&&& \lambda &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&&&&&& 1 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}$$

Questa matrice è uguale ad I_n con l'eccezione dell'entrata (i, j), dove c'è il valore λ.

Per $i \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq n$ e un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che $\lambda \neq 0$ definiamo

$$M(i;\lambda) := \begin{pmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&&& \lambda &&& \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix}$$

Questa matrice è uguale ad I_n con l'eccezione che dell'entrata (i, i) dove c'è il valore λ.

Si controlla facilmente che

$$\begin{aligned}
S(i,j;\lambda)S(i,j;-\lambda) = S(i,j;-\lambda)S(i,j;\lambda) &= I_n \\
M(i;\lambda)M(i;\frac{1}{\lambda}) = M(i;\frac{1}{\lambda})M(i;\lambda) &= I_n \\
P(i,j)P(i,j) &= I_n
\end{aligned}$$

In particolare $P(i,j)$, $S(i,j;\lambda)$ e $M(i,\lambda)$ sono invertibili e

$$P(i,j)^{-1} = P(i,j);\ S(i,j;\lambda)^{-1} = S(i,j;-\lambda);\ M(i;\lambda)^{-1} = M(i,\frac{1}{\lambda})$$

Sia adesso A una matrice $m \times n$ e sia E una matrice elementare, vogliamo studiare i prodotti EA.

Proposizione 2.12. *Sia A una matrice $n \times p$.*

- *$P(i,j)A$ è la matrice ottenuta da A scambiando le righe i e j.*
- *$S(i,j;\lambda)A$ è la matrice ottenuta da A sommando λ volte la riga j alla riga i.*
- *$M(i,\lambda)A$ è la matrice ottenuta da A moltiplicando la riga i con λ.*

Dimostrazione. Questo si controlla con un calcolo diretto. □

Grazie a questa proposizione possiamo introdurre un metodo per il calcolo dell'inversa di una matrice.

Lemma 2.13. *Sia A una matrice $n \times n$. Allora la forma a scala di A contiene una riga con solo zeri oppure I_n è una forma a scala di A.*

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo il procedimento dell'eliminazione di Gauß ad A fino ad arrivare ad una matrice A' in forma a scala ridotta. Se non c'è nessuna riga con solo zeri, allora abbiamo n pivots su n righe. Quindi ogni colonna contiene un pivot. Cioè i pivot sono ai posti (i,i). In particolare $A_{i,j} = 0$ per $i \neq j$. Per $i = 1, \dots n$ possiamo moltiplicare la riga i con $\frac{1}{a_{i,i}}$ e trovare così la matrice I_n. □

LEMMA 2.14. *Sia A una matrice $n \times n$. Se I_n è una forma a scala di A allora A è un prodotto di matrici elementari.*

DIMOSTRAZIONE. Ogni operazione elementare è equivalente a moltiplicare a sinistra con una matrice elementare. Quindi quando I_n è una forma a scala di A allora ci sono delle matrici elementari $E_1, \dots, E_t$ tali che

$$E_t E_{t-1} \dots E_1 A = I_n$$
$$A = (E_1 \dots E_t)^{-1} = E_t^{-1} \dots E_1^{-1}$$

Come abbiamo visto sopra, l'inversa di una matrice elementare è una matrice elementare. Quindi A è un prodotto di matrici elementari. □

LEMMA 2.15. *Sia A una matrice $n \times n$. Se I_n è una forma a scala di A allora A è invertibile.*

DIMOSTRAZIONE. Se I_n è invertibile allora A è un prodotto di matrici elementari. Matrici elementari sono invertibile, quindi A è un prodotto di matrici invertibile. Quest implica che anche A è invertibile. (Proposizione 2.10.) □

OSSERVAZIONE 2.16. Piu tardi mostreremo che, se I_n non è una forma a scala di A, allora A non è invertibile.

OSSERVAZIONE 2.17. Per non dover calcolare il prodotto delle matrici elementari, possiamo utilizzare il seguente metodo. Cominciamo con la matrice $n \times 2n$ $(A|I_n)$ e applichiamo la procedura di Gauß. Ci fermeremo quando una riga a sinistra della $|$ è zero, altrimenti si arriverà ad ottenere la matrice I_n a sinistra e troviamo una matrice della forma

$$(I_n|B).$$

Ora ci basterà ricostruire il procedimento utilizzato pensando alle matrici elementari. Siano $E_1, \dots, E_t$ le matrici elementari t.c.

$$E_t \dots E_1 (A|I_n) = (I_n|B)$$

Dato che

$$E_t \dots E_1 (A|I_n) = (E_t \dots E_1 A | E_t \dots E_1 I_n),$$

segue che $B = E_t \dots E_1$ e $A^{-1} = E_t \dots E_1 = B$.

Cioè cominciando con $(A|I_n)$ troviamo $(I_n|A^{-1})$.

ESEMPIO 2.18. Con una seria di applicazione sulle righe troviamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Esempio 2.19. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $b \in \mathbf{R}^m$. Allora il sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

si puo riscrive come

$$Ax = b$$

dove

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Assumiamo adesso che $m = n$ e A è invertible. Allora se $x \in \mathrm{Sol}(A, b)$ troviamo che $Ax = b$ e quindi

$$x = I_n x = (A^{-1}A)(x) = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b.$$

Quindi, l'unica soluzione possibile è $A^{-1}b$. Dal fatto che $A(A^{-1}b) = I_n b = b$ segue che è veramente una soluzione. In questo caso troviamo

$$\mathrm{Sol}(A, b) = \{A^{-1}b\}.$$

3. La matrice trasposta

L'ultima operazione sulle matrici che volgiamo discutere è la trasposta.

Definizione 2.20. Sia A una matrice $m \times n$. Allora la trasposta A^T di A è la matrice $n \times m$ definita da

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

Esempio 2.21.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Proposizione 2.22. *Siano A, B matrici $m \times n$, sia C una matrice $n \times p$.*

(1) $(A + B)^T = A^T + B^T$.
(2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
(3) $(A^T)^T = A$.
(4) $(AC)^T = C^T A^T$.
(5) Se A è invertibile allora anche A^T è invertibile e si ha $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Dimostrazione. Per il primo punto si nota

$$((A+B)^T)_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = A^T_{ij} + B^T_{ij}$$

Il secondo e terzo punto si dimostrano in mode simile.

Per il quarto punto:

$$\begin{aligned}
(AC)^T_{ij} &= (AC)_{ji} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{jk} C_{ki} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (A^T)_{kj} C^T_{ik} \\
&= \sum_{k=1}^{n} C^T_{ik} (A^T)_{kj} \\
&= (C^T A^T)_{ij}
\end{aligned}$$

L'ultimo punto segue da

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n$$

e

$$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$$

$\square$