

## CAPITOLO 1

### Sistemi di equazioni lineari

Gli oggetti che studieremo nel corso sono *le equazioni lineari*, ossia equazioni del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

dove  $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbf{R}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . (Qua usiamo  $\mathbf{R}$  per indicare i numeri reali, che verranno propriamente definiti nel corso di analisi, e usiamo  $\mathbf{N}$  per indicare l'insieme  $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ .)

Per esempio

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4$$

è una equazione lineare. Ma anche

$$0 = 2 \text{ e } x_1 = 3$$

sono equazioni lineari.

Nelle prime lezioni ci concentreremo nello studio dei sistemi di equazioni lineari. Come vedrete spesso durante la vostra carriera accademica, una strategia molto efficace per la risoluzione di un problema fisico/matematico complicato è quella di tradurlo nel linguaggio dell'algebra lineare. Questo è uno dei principali motivi per cui studiare questi sistemi di equazioni in dettaglio è molto importante.

DEFINIZIONE 1.1. Un sistema di  $m$  equazioni lineari in  $n$  incognite  $x_1, \dots, x_n$  è un numero finito di equazioni lineari

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

ESEMPIO 1.2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 & = & 7 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 & = & 1 \end{cases}$$

è un sistema di tre equazioni lineari in tre incognite.

Per motivi pratici preferiremo scrivere solamente i numeri  $a_{ij}$  e  $b_k$  associati a tale sistema.

DEFINIZIONE 1.3. La *matrice dei coefficienti* associata al sistema (1) è

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La *matrice completa* del sistema (1) è

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

ESEMPIO 1.4. La matrice completa associata al sistema dell'Esempio 1.2 è

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Il nostro primo obiettivo sarà quello di individuare tecniche di risoluzione di sistemi di equazioni lineari. Come primo passo dovremo determinare dove ricercare le soluzioni. Questo richiede però la discussione di alcune questioni delicate, che preferiamo rimandare alla fine del capitolo. Per adesso daremo semplicemente la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.5. Sia  $(A | b)$  la matrice completa di un sistema di equazioni lineari. Allora *l'insieme di soluzioni di  $(A|b)$*  è

$$\text{Sol}(A, b) := \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n \\ \left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} \right\}.$$

Il prossimo obiettivo sarà quello di descrivere un procedimento per cui, dato  $(A|b)$ , si riesca a determinare l'insieme  $\text{Sol}(A, b)$ . L'idea è di modificare il sistema in modo da determinare un sistema equivalente che sia più facile da risolvere. 'Equivalente' per noi significa che durante i vari passaggi non vogliamo cambiare l'insieme delle soluzioni.

Più precisamente:

DEFINIZIONE 1.6. Diciamo che una matrice  $A := (a_{i,j})$  è in *forma a scala* se esiste un intero  $r$  tale che

- (1)  $a_{i,j} = 0$  per ogni  $i \in \{r+1, \dots, m\}$  e  $j \in \{1, \dots, n\}$ .
- (2) Per ogni  $i \in \{1, \dots, r\}$  esiste un intero  $j$  tale che  $a_{i,j} \neq 0$ .
- (3) Per  $i = 1, \dots, r$  sia  $j_i := \min\{j | a_{ij} \neq 0\}$ . Allora

$$j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_r$$

Se inoltre si verifica che per ogni  $k \in \{1, \dots, r\}$  ed ogni  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  vale  $a_{i,j_k} = 0$  allora diremo che  $A$  è in *forma a scala ridotta*.

Gli elementi  $a_{i,j_i}$  verranno chiamati *pivots*.

Esplicitamente, vogliamo che ognuna delle prime  $r$  righe sia non-nulla, che le altre righe siano nulle e che ogni riga non-nulla abbia il primo elemento non-zero in una posizione più a destra rispetto al primo elemento non-zero della riga precedente. Graficamente:

$$\left( \begin{array}{cccccccc} * & & & & & & & \\ & * & & & & & & \\ 0 & & * & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & * \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & \dots & & \end{array} \right)$$

ESEMPIO 1.7. La matrice

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

è in forma a scala. Se si considera questa matrice come matrice completa di un sistema di equazioni lineari, allora il sistema corrispondente è

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ -x_3 = 1 \end{cases}$$

L'unica soluzione di questo sistema è  $x_1 = -6, x_2 = 5, x_3 = -1$ .

Cioè i sistemi di equazioni lineari tali che loro matrici completa è in forma a scala sono facili da risolvere (in maniera ricorsiva, a partire dall'ultima equazione). Adesso mostreremo che ogni sistema di equazioni lineari si può trasformare in un sistema in forma a scala.

DEFINIZIONE 1.8. Sia  $A$  una matrice. Allora chiamiamo le seguente tre operazioni

- (1) scambiare due righe di  $A$ ;
- (2) moltiplicare una riga di  $A$  con un numero  $\lambda$  non-zero;
- (3) sommare  $\lambda$  volte la riga  $i$  di  $A$  alla riga  $k$  di  $A$  (con  $i \neq k$ );

*operazioni elementari sulle righe di  $A$ .*

Le operazioni elementari hanno molte applicazioni in vari contesti. Per adesso le utilizzeremo per risolvere sistemi di equazioni lineari.

PROPOSIZIONE 1.9. Sia  $(A|b)$  una matrice completa di un sistema lineare, e sia  $(A'|b')$  la matrice ottenuta da  $(A|b)$  applicando una qualsiasi operazione elementare. Allora

$$\text{Sol}(A, b) = \text{Sol}(A', b')$$

DIMOSTRAZIONE. Scambiare due righe in  $(A|b)$  corrisponde a scambiare due equazioni nel sistema. È chiaro che l'ordine delle equazioni non influisce l'insieme delle soluzioni, così per questa operazione abbiamo facilmente che  $\text{Sol}(A, b) = \text{Sol}(A', b')$ .

Sia ora  $(x_1, \dots, x_n)$  una soluzione del sistema  $(A|b)$ . Adesso moltiplichiamo un'equazione con un numero  $\lambda$ , determinando un nuovo sistema  $(A'|b')$ . Anche in questo caso è ovvio che  $(x_1, \dots, x_n)$  è anche una soluzione del sistema  $(A', b')$ . Similmente, sommando un multiplo di un'equazione ad altre equazioni troviamo che le soluzioni del vecchio sistema sono anche soluzioni del nuovo sistema. In altre parole, abbiamo sempre che

$$\text{Sol}(A, b) \subset \text{Sol}(A', b').$$

Se  $(A', b')$  è ottenuta da  $(A, b)$  moltiplicando la  $i$ -esima riga con  $\lambda$ , allora, usando che  $\lambda \neq 0$  possiamo definire  $(A''|b'')$  come la matrice ottenuta da  $(A', b')$  moltiplicando la  $i$ -esima riga con  $\frac{1}{\lambda}$ . Se  $A'$  è ottenuta da  $A$  sommando  $\lambda$  volte riga  $i$  su riga  $k$ , allora possiamo definire  $(A''|b'')$  come la matrice ottenuta da  $(A', b')$  sommando  $-\lambda$  volte riga  $i$  su riga  $k$ . In ambi due i casi troviamo

$$\text{Sol}(A', b') \subset \text{Sol}(A'', b'').$$

Abbiamo costruito  $(A''|b'')$  tali che  $(A''|b'') = (A|b)$ . In particolare

$$\text{Sol}(A, b) \subset \text{Sol}(A', b') \subset \text{Sol}(A, b)$$

e quindi  $\text{Sol}(A', b') = \text{Sol}(A, b)$ . □

OSSERVAZIONE 1.10. Il significato del simbolo  $\subset$  potrebbe cambiare in alcuni testi. Nella maggiore parte dei casi (e anche in questo testo)  $A \subset B$  significherà che ogni elemento di  $A$  è anche un elemento di  $B$ .

In vari testi, si utilizza  $\subseteq$  per indicare questa proprietà.

Per indicare che ogni elemento di  $A$  è anche un elemento di  $B$ , ma  $A$  e  $B$  non uguali si utilizzerà  $A \subsetneq B$ .

Possiamo usare questo risultato per risolvere il sistema dell'Esempio 1.2:

ESEMPIO 1.11. Cominciamo con la matrice

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Sottraiamo la prima riga dalla seconda riga e troviamo

$$\text{II} - \text{I} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Sottraiamo la prima riga dalla terza riga e troviamo

$$\text{III} - \text{I} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Sottraiamo cinque volte la seconda riga dalla terza riga e troviamo

$$\text{III} - 5\text{II} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -22 & -22 \end{array} \right)$$

Adesso dividiamo la terza riga per  $-22$ :

$$\text{III}/(-22) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Adesso abbiamo trovato la forma a scala e possiamo risolvere il sistema come sopra. In alternativa possiamo cercare la forma a scala ridotta. Per fare questo, sottraiamo 4 volte la terza riga dalla seconda, e sottraiamo la terza riga dalla prima riga:

$$\text{II} - 4\text{III} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Adesso sottraiamo due volte la seconda riga dalla prima riga:

$$\text{I} - 2\text{II} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Ora il sistema corrispondente è  $x_1 = 2; x_2 = 0; x_3 = 1$  e

$$\text{Sol}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La procedura utilizzata nell'esempio si chiama *eliminazione di Gauß*. Questa procedura viene descritta nella dimostrazione della seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 1.12. *Sia  $A$  una matrice, allora utilizzando una serie di operazioni elementari su  $A$  si può trasformare  $A$  in una matrice in forma a scala, e volendo anche in forma a scala ridotta.*

DIMOSTRAZIONE. Se  $A$  fosse la matrice tale che  $a_{ij} = 0$  per ogni  $i, j$ , allora  $A$  sarebbe già in forma a scala (con  $r = 0$ ). Altrimenti, sia  $j_1$  il numero della colonna più a sinistra di  $A$  che contiene un coefficiente diverso da zero.

Sia  $i_1$  il numero della riga più in alto tale che il coefficiente nella colonna  $j_1$  è diverso da 0. Se  $i_1 > 1$  allora si scambiano la riga 1 con la riga  $i_1$ . A questo punto abbiamo che  $a_{1j_1} \neq 0$ . Adesso sia  $\tilde{A}$  ottenuta da  $A$  sommando

$$-\frac{a_{ij_1}}{a_{1,j_1}}$$

volte la prima riga su riga  $i$  per  $i = 2, \dots, m$ . Cioè troviamo che

$$\tilde{a}_{i,j} := a_{i,j} - \frac{a_{ij_1}}{a_{1,j_1}} a_{1,j}$$

Se  $j < j_1$  allora  $a_{i,j}$  e  $a_{1,j}$  sono zero e quindi  $\tilde{a}_{i,j} = 0$ . Se  $j = j_1$  e  $i > 1$  troviamo che

$$\tilde{a}_{i,j_1} = a_{i,j_1} - \frac{a_{ij_1}}{a_{1,j_1}} a_{1,j_1} = 0.$$

Cioè le prime  $j_1 - 1$  colonne sono composte da tutti zeri, e nella colonna  $j_1$  c'è un unico coefficiente non zero che troviamo nella prima riga.

Adesso si applica la stessa procedura alle righe 2 fino a  $n$ . In quella matrice la colonna  $j_1$  è zero, e si trova che  $j_1 < j_2$ .

Per trovare la forma ridotta dobbiamo adesso sottrarre  $\frac{a_{i,j_k}}{a_{k,j_k}}$  volte la riga  $k$  dalla riga  $i$  per  $i = 1, \dots, k - 1$  e  $k = 2, \dots, r$ .  $\square$

ESEMPIO 1.13. Consideriamo

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & -2 \end{array} \right)$$

Per trovare la forma a scala si comincia con lo scambiare le prime due righe.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & -2 \end{array} \right)$$

Adesso si somma la prima riga alla terza e si sottrae la prima riga dall'ultima riga:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Adesso si sottrae due volte la seconda riga dalla terza e si somma la seconda riga alla quarta.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

Sommando adesso la terza riga alla quarta si determina la forma a scala:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Per trovare la forma ridotta si divide la terza riga per 2:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Adesso si somma la terza alla seconda, e si sottrae 4 volta la terza riga alla prima:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 14 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Si moltiplica la prima riga per 2:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

e si sottrae 3 volte la seconda riga dalla prima

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 31 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x_1 = -31/2x_4 - 2; x_2 = \frac{1}{2}x_4, x_3 = 3x_4$$

Adesso che abbiamo stabilito che ogni matrice può essere trasformata in forma a scala, vogliamo dedurre come individuare le soluzioni del sistema, se esistono, da questa forma semplificata. Sia  $(A|b)$  in forma a scala.

**Risolvibilità:** Iniziamo considerando il caso  $j_r = n+1$ . In questo caso l'ultima riga che non è identicamente zero è della forma

$$( 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ b_r )$$

con  $b_r \neq 0$ . L'equazione corrispondente è del tipo

$$0 = b_r$$

che non ha soluzione. Quindi anche il sistema non ha soluzioni.

**Soluzioni:** Adesso supponiamo che  $j_r < n+1$ . Per  $i = 1, \dots, r$  troviamo che l'equazione corrispondente alla riga  $i$  è

$$a_{i,j_i}x_{j_i} + a_{i,j_i+1}x_{j_i+1} + \dots + a_{i,n}x_n = b_i$$

con  $a_{i,j_i} \neq 0$ . Possiamo riscrivere il sistema

$$\begin{cases} x_{j_1} &= \frac{1}{a_{1,j_1}}(b_1 - a_{1,j_1+1}x_{j_1+1} + \dots + a_{1,n}x_n) \\ x_{j_2} &= \frac{1}{a_{2,j_2}}(b_2 - a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \dots + a_{2,n}x_n) \\ &\vdots \\ x_{j_r} &= \frac{1}{a_{r,j_r}}(b_r - a_{r,j_r+1}x_{j_r+1} + \dots + a_{r,n}x_n) \end{cases}$$

Quindi possiamo scegliere  $x_{j_r+1}, \dots, x_n$  come vogliamo e questi determinano  $x_{j_r}$ . Dopo possiamo scegliere  $x_{j_{r-1}+1}, \dots, x_{j_r-1}$  come vogliamo e questi determinano  $x_{j_{r-1}}$  e continuiamo.

Ricapitolando, i valori di  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$  sono completamente determinati una volta che abbiamo scelto i valori per le altre variabili. Chiameremo le incognite corrispondenti alle colonne che contengono i pivot *incognite determinate*. Chiameremo le altre incognite *incognite libere*.

**Unicità:** La forma a scala non è unica. Aggiungendo la condizione che tutti i pivot siano 1, allora la forma a scala ridotta sarà invece unica.

**PROPOSIZIONE 1.14.** *Sia  $A$  una matrice  $m \times n$ ,  $b$  una matrice  $m \times 1$ . Allora per  $\text{Sol}(A, b)$  ci sono tre possibilità. Può essere vuoto, consistere di un unico elemento o essere infinito.*

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $\text{Sol}(A, b)$  non sia vuoto. Allora se non ci sono incognite libere, allora la soluzione è unica e troviamo un unico elemento in  $\text{Sol}(A, b)$ . Se c'è almeno un'incognita libera, diciamo  $x_i$ , allora l' $i$ -esima coordinata può avere qualsiasi valore e quindi  $\text{Sol}(A, b)$  è infinito.  $\square$

**ESEMPIO 1.15.** Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 - 2x_7 = 0 \\ x_3 + 6x_7 = 2 \\ x_5 + x_7 = 0 \end{cases}$$

in  $x_1, \dots, x_7$ . Allora  $x_2, x_3, x_5$  sono le incognite determinate,  $x_1, x_4, x_6, x_7$  sono le incognite libere e

$$\text{Sol} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \left( \begin{array}{c} t_1 \\ -2t_2 + 2t_4 \\ 2 - 6t_4 \\ t_2 \\ -t_4 \\ t_3 \\ t_4 \end{array} \right) \mid t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbf{R} \right\}$$

Dove abbiamo prima imposto  $x_1 = t_1, x_4 = t_2, x_6 = t_3, x_7 = t_4$ , poi risolto per  $x_2, x_3, x_5$ .

