Lezione 1 - Geometria per Astronomia e Fisica

Remke Kloosterman

Unipd

2020

Equazioni lineari

Gli oggetti che studieremo nel corso sono *le equazioni lineari*, ossia equazioni del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

dove $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

Qua usiamo $\mathbf{R}$ per indicare i numeri reali, che verranno propriamente definiti nel corso di analisi, e usiamo $\mathbf{N}$ per indicare l'insieme $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Equazioni lineari

Per esempio

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4$$

è una equazione lineare. Ma anche

$$0 = 2 \text{ e } x_1 = 3$$

sono equazioni lineari.

Sistemi di equazioni lineari

Nelle prime lezioni ci concentreremo nello studio dei sistemi di equazioni lineari.

Definizione

Un sistema di m equazioni lineari in n incognite $x_1, \ldots, x_n$ è un numero finito di equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{1}$$

Esempio

Esempio

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 & = & 7 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 & = & 1 \end{cases}$$

è un sistema di tre equazioni lineari in tre incognite.

Studiare l'insieme degli soluzioni di un sistema di equazioni lineari.

Rappresentazione di sistemi di equazioni lineari

Per motivi pratici preferiremo scrivere solamente i numeri a_{ij} e b_k associati a tale sistema.

Definizione

La *matrice dei coefficienti* associata al sistema (1) è

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rappresentazione di sistemi di equazioni lineari

La *matrice completa* del sistema (1) è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Esempio

La matrice completa associata al sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 & = & 7 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 & = & 1 \end{cases}$$

è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Risolvere sistemi

Definizione

Sia $(A \mid b)$ la matrice completa di un sistema di equazioni lineari. Allora *l'insieme di soluzioni di* $(A|b)$ notata con $\mathrm{Sol}(A, b)$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\}.$$

Come determinare $\mathrm{Sol}(A, b)$ in modo efficiente?

Operazioni sulle righe

Definizione

Sia A una matrice. Allora chiamiamo le seguente tre operazioni

1. scambiare due righe di A;
2. moltiplicare una riga di A con un numero λ non-zero;
3. sommare λ volte la riga i di A alla riga k di A (con $i \neq k$);

operazioni elementari sulle righe di A.

Proposizione

Sia $(A|b)$ *una matrice completa di un sistema lineare, e sia* $(A'|b')$ *la matrice ottenuta da* $(A|b)$ *applicando una qualsiasi operazione elementare sulle righe. Allora*

$$\mathrm{Sol}(A, b) = \mathrm{Sol}(A', b')$$

(Operazioni sulle righe non cambiano le soluzioni)

Operazioni sulle colonne

Dimostrazione:
Scambiare delle righe corrisponde a scambiare equazioni. L'ordine delle equazioni non influisce le soluzioni.
Che cosa succede quando sommiamo un multiplo di una riga ad un'altra?

Dimostrazione

Dimostrazione: Un Esempio: Prendiamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15 \end{cases}$$

Sia (a_1, a_2, a_3) una soluzione. (Per esempio $(1, 1, 1)$.) Se sommiamo 2 volte la prima riga sulla seconda allora otteniamo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 6x_1 + 9x_2 + 12x_3 = 27 \end{cases}$$

(a_1, a_2, a_3) è di nuova una soluzione. Sappiamo che $a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 6$. Per la seconda:

$$6a_1+9a_2+12a_3 = 4a_1+5a_2+6a_3+2(a_1+2a_2+3a_3) = 15+2*6 = 27$$

Quindi anche la seconda equazione è soddisfatto.

Dimostrazione

In generale, sia ora $(x_1, \ldots, x_n)$ una soluzione del sistema $(A|b)$. Se A' è ottenuta da A sommando λ volte riga i alla riga k, allora $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è anche una soluzione di $(A'|b')$ e

$$\mathrm{Sol}(A, b) \subset \mathrm{Sol}(A'|b').$$

Adesso definiamo $(A''|b'')$ come la matrice ottenuta da (A', b') sommando $-\lambda$ volte riga i alla riga k. Otteniamo

$$\mathrm{Sol}(A', b') \subset \mathrm{Sol}(A'', b'').$$

Abbiamo costruito $(A''|b'')$ tale che $(A''|b'') = (A|b)$. In particolare

$$\mathrm{Sol}(A, b) \subset \mathrm{Sol}(A', b') \subset \mathrm{Sol}(A'', b'') = \mathrm{Sol}(A, b)$$

e quindi $\mathrm{Sol}(A', b') = \mathrm{Sol}(A, b)$.

Dimostrazione

Adesso moltiplichiamo un'equazione con un numero λ, determinando un nuovo sistema $(A'|b')$. Anche in questo caso è ovvio che $(x_1, \ldots, x_n)$ è anche una soluzione del sistema (A', b'). Similmente, sommando un multiplo di un'equazione ad altre equazioni troviamo che le soluzioni del vecchio sistema sono anche soluzioni del nuovo sistema. In altre parole, abbiamo sempre che

$$\mathrm{Sol}(A, b) \subset \mathrm{Sol}(A', b').$$

Se (A', b') è ottenuta da (A, b) moltiplicando la $i-$esima riga con λ, allora, usando che $\lambda \neq 0$ possiamo definire $(A''|b'')$ come la matrice ottenuta da (A', b') moltiplicando la $i-$esima riga con $\frac{1}{\lambda}$. Di nuovo abbiamo

$$\mathrm{Sol}(A, b) \subset \mathrm{Sol}(A', b') \subset \mathrm{Sol}(A'', b'') = \mathrm{Sol}(A, b)$$

Quindi $\mathrm{Sol}(A, b) = \mathrm{Sol}(A', b')$.

Notazione

Il significato del simbolo $\subset$ potrebbe cambiare in alcuni testi.
Per noi $A \subset B$ significherà che ogni elemento di A è anche un elemento di B. (In vari testi, si utilizza $\subseteq$ per indicare questa properietà.)
Per indicare che ogni elemento di A è anche un elemento di B, ma A e B non uguali si utilizzerà $A \subsetneq B$.

Esempio di operazioni sulle righe

Possiamo usare queso risultato per risolvere il sistema dell'Esempio 0.2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 & = & 7 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 & = & 1 \end{cases}$$

Cominciamo con la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Esempio di operazioni sulle righe

Sottraiamo la prima riga dalla seconda riga e troviamo

$$\mathrm{II} - \mathrm{I} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 7 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Esempio di operazioni sulle righe

Sottraiamo la prima riga dalla terza riga e troviamo

$$\begin{array}{c} \\ \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Esempio di operazioni sulle righe

Sottraiamo cinque volte la seconda riga dalla terza riga e troviamo

$$\begin{array}{c} \\ \\ \mathrm{III}-5\mathrm{II} \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -22 & -22 \end{array}\right)$$

Esempio di operazioni sulle righe

Adesso dividiamo la terza riga per -22:

$$\mathrm{III}/(-22) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A questo punto abbiamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ \qquad\quad x_2 + 4x_3 = 4 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = 1 \end{cases}$$

Esempio di operazioni sulle righe

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

La terza equazione da $x_3 = 1$. Lo sostituiamo nella seconda equazione e otteniamo

$$x_2 + 4 = 4$$

quindi $x_2 = 0$. Otteniamo che la prima equazione è

$$x_1 + 0 + 1 = 3$$

Quindi $x_1 = 2$.
L'unica soluzione è $(2, 0, 1)$.

Forma a scala

Definizione

Diciamo che una matrice $A := (a_{i,j})$ è in *forma a scala* se esiste un intero r tale che

1. $a_{i,j} = 0$ per ogni $i \in \{r+1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$.
2. Per ogni $i \in \{1, \ldots, r\}$ esiste un intero j tale che $a_{i,j} \neq 0$.
3. Per $i = 1, \ldots, r$ sia $j_i := \min\{j | a_{ij} \neq 0\}$. Allora

$$j_1 < j_2 < j_3 < \cdots < j_r$$

Se inoltre si verifica che per ogni $k \in \{1, \ldots, r\}$ ed ogni $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ vale $a_{i,j_k} = 0$ allora diremo che A è in *forma a scala ridotta*.
Gli elementi a_{i,j_i} verranno chiamati *pivots*.

Grafico

Esplicitamente, vogliamo che ognuna delle prime r righe sia non-nulla, che le altre righe siano nulle e che ogni riga non-nulla abbia il primo elemento non-zero in una posizione più a destra rispetto al primo elemento non-zero della riga precedente. Graficamente:

$$\begin{pmatrix}
* & & & & & & \\
 & & * & & & & \\
0 & & & * & & & \\
 & \ddots & & & & \ddots & \\
 & & 0 & & & & * \\
0 & 0 & & & \cdots 0 \cdots & &
\end{pmatrix}$$

Esempio

Esempio

La matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

è in forma a scala. Se si considera questa matrice come matrice completa di un sistema di equazioni lineari, allora il sistema corrispondente è

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3 \\ \qquad 2x_2 + 4x_3 & = & 6 \\ \qquad\qquad -x_3 & = & 1 \end{cases}$$

L'unica soluzione di questo sistema è $x_1 = -6, x_2 = 5, x_3 = -1$.

Teorema principale

Proposizione

Sia A una matrice, allora utilizzando una serie di operazioni elementari su A si può trasformare A in una matrice in forma a scala, e volendo anche in forma a scala ridotta.

Dimostrazione:

Se A fosse le matrice tale che $a_{ij} = 0$ per ogni i, j, allora A sarebbe già in forma a scala (con $r = 0$). Altrimenti, sia j_1 il numero della colonna più a sinistra di A che contiene un coefficiente diverso da zero.

Dimostrazione

Sia i_1 il numero della riga più in alto tale che il coefficiente nella colonna j_1 è diverso da 0. Se $i_1 > 1$ allora si scambi la riga 1 con la riga i_1.
A questo punto abbiamo che $a_{1j_1} \neq 0$. Adesso sia $\tilde{A}$ ottenuta da A sommando

$$-\frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}}$$

volte la prima riga alla riga i per $i = 2, \ldots, m$. Cioè troviamo che

$$\tilde{a}_{ij} := a_{ij} - \frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}} a_{1j}$$

(Prime colonne:) Se $j < j_1$ allora a_{ij} e a_{1j} sono zero e quindi $\tilde{a}_{ij} = 0$.
(Colona j:) Se $j = j_1$ e $i > 1$ troviamo che

$$\tilde{a}_{ij_1} = a_{ij_1} - \frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}} a_{1j_1} = 0.$$

Dimostrazione

Cioè le prime $j_1 - 1$ colonne sono composte da tutti zeri, e nella colonna j_1 c'è un unico coefficiente non zero che troviamo nella prima riga.
Adesso si applica la stessa procedura alle righe 2 fino a m. In quella matrice la colonna j_1 è zero, e si trova che $j_1 < j_2$.
Per trovare la forma ridotta dobbiamo adesso sottrarre $\frac{a_{ij_k}}{a_{kj_k}}$ volte la riga k dalla riga i per $i = 1, \ldots, k-1$ e $k = 2, \ldots, r$.

Esempio

Consideriamo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & -2 \end{array}\right)$$

Esempio

Per trovare la forma a scala si comincia con lo scambiare le prime due righe.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & -2 \end{array}\right)$$

Esempio

Adesso si somma la prima riga alla terza e si sottrae la prima riga dall'ultima riga:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Esempio

Adesso si sottrae due volte la seconda riga dalla terza e si somma la seconda riga alla quarta.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Esempio

Sommando adesso la terza riga alla quarta si determina la forma a scala:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esempio

Per trovare la forma ridotta si divide la terza riga per 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esempio

Adesso si somma la terza alla seconda, e si sottrae 4 volta la terza riga alla prima:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 14 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esempio

Si moltiplica la prima riga per 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esempio

e si sottrae 3 volte la seconda riga dalla prima

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 31 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 = -31/2x_4 - 2; x_2 = \frac{1}{2}x_4, x_3 = 3x_4$

Esempio con parametro

Consideriamo per ogni $k \in \mathbf{R}$

$$\begin{cases} kx_1 - kx_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ k^2x_1 + k^2x_3 + x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Allora la matrice associate è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & -k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ k^2 & k^2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Esempio con parametro

Scambiamo le prime due rige

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & -k & 1 & 0 \\ k^2 & k^2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Esempio con parametro

Dopo sommiamo $-k$ volte la prima riga alla seconda e $-k^2$ volte la prima riga alla terza:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2k & 1-k & -k \\ 0 & 0 & 1-k^2 & -k^2 \end{array}\right)$$

Se $-2k \neq 0$ e $1-k^2 \neq 0$ allora la matrice è in forma a scala. Quindi se $k \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ allora la matrice è gia in forma a scala. In quel caso la terza equazione è $(1-k^2)x^3 = -k^2$. Quindi $x_3 = \frac{-k^2}{1-k^2} = \frac{k^2}{k^2-1}$.

Esempio con parametro

La seconda equazione è $-2kx_2 + (1-k)x_3 = k$. Otteniamo

$$\begin{aligned}
(-2k)x_2 &= -k + (k-1)x_3 \\
&= -k + \frac{(k-1)k^2}{k^2-1} \\
&= -k + \frac{k^2}{k+1} \\
&= \frac{-k(k+1)+k^2}{k+1} \\
&= \frac{-k^2-k+k^2}{k+1} = \frac{-k}{k+1}
\end{aligned}$$

(Si usa $k^2-1=(k-1)(k+1)$. Quindi $\frac{k-1}{k^2-1} = \frac{1}{k+1}$.)
Allora, $x_2 = \frac{-k}{(k+1)(-2k)} = \frac{1}{2(k+1)}$.

Esempio con parametro

Quindi $x_3 = \frac{k^2}{k^2-1}$, $x_2 = \frac{1}{2(k+1)}$. Da $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ segue

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - \frac{1}{2(k+1)} - \frac{k^2}{k^2-1} = \frac{-1}{2(k-1)}.$$

Esempio con parametro

Se $k = 0$ allora il sistema simplifica a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Sottraiamo la seconda riga dalla prima e dalla terza. Otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Quindi $x_3 = 0$, $x_1 = 1 - x_2$.

Esempio con parametro

Se $k = 1$ allora il sistema diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

L'ultima equazione è $0 = -1$, quindi il sistema non ha soluzioni.
Se $k = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

L'ultima equazione è $0 = -1$, che non ha soluzioni.