Lezione 2 - Geometria per Astronomia e Fisica

Remke Kloosterman

Unipd

2020

Forma a scala

Ieri abbiamo stabilito che ogni matrice può essere trasformata in forma a scala, vogliamo dedurre come individuare le soluzioni del sistema, se esistono, da questa forma semplificata. Sia $(A|b)$ in forma a scala.

Adesso che abbiamo stabilito che ogni matrice può essere trasformata in forma a scala, vogliamo dedurre come individuare le soluzioni del sistema, se esistono, da questa forma semplificata. Sia $(A|b)$ in forma a scala.

Risolvibilità

Iniziamo considerando il caso $j_r = n + 1$. In questo caso l'ultima riga che non è identicamente zero è della forma

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_r \end{array}\right)$$

con $b_r \neq 0$. L'equazione corrispondente è del tipo

$$0 = b_r$$

che non ha soluzione. Quindi anche il sistema non ha soluzioni.

Soluzioni

Adesso supponiamo che $j_r < n + 1$. Per $i = 1, \ldots r$ troviamo che l'equazione corrispondente alla riga i è

$$a_{i,j_i} x_{j_i} + a_{i,j_i+1} x_{j_i+1} + \cdots + a_{i,n} x_n = b_i$$

con $a_{i,j_i} \neq 0$. Possiamo riscrivere il sistema

$$\begin{cases} x_{j_1} & = & \frac{1}{a_{1,j_1}}(b_1 - a_{1,j_1+1} x_{j_1+1} + \cdots + a_{1,n} x_n) \\ x_{j_2} & = & \frac{1}{a_{2,j_2}}(b_2 - a_{2,j_2+1} x_{j_2+1} + \cdots + a_{2,n} x_n) \\ & \vdots & \\ x_{j_r} & = & \frac{1}{a_{r,j_r}}(b_r - a_{r,j_r+1} x_{j_r+1} + \cdots + a_{r,n} x_n) \end{cases}$$

Quindi possiamo scegliere $x_{j_r+1}, \ldots, x_n$ come vogliamo e questi determinano x_{j_r}. Dopo possiamo scegliere $x_{j_{r-1}+1}, \ldots, x_{j_r-1}$ come vogliamo e questi determinano $x_{j_{r-1}}$ e continuiamo.

Ricapitolando, i valori di $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ sono completamente determinati una volta che abbiamo scelto i valori per le altre variabili. Chiameremo le incognite corrispondenti alle colonne che contengono i pivot *incognite determinate*. Chiameremo le altre incognite *incognite libere*.

Unicità:

La forma a scala non è unica. Aggiungendo la condizione che tutti i pivot siano 1, allora la forma a scala ridotta sarà invece unica.

Proposizione

Sia A una matrice $m \times n$, b una matrice $m \times 1$. Allora per $\mathrm{Sol}(A, b)$ *ci sono tre possibilità. Può essere vuoto, consistere di un unico elemento o essere infinito.*

Dimostrazione.

Supponiamo che $\mathrm{Sol}(A, b)$ non sia vuoto. Allora se non ci sono incognite libere, allora la soluzione è unica e troviamo un unico elemento in $\mathrm{Sol}(A, b)$. Se c'è almeno un'incognita libera, diciamo x_i, allora l'i-esima coordinata può avere qualsiasi valore e quindi $\mathrm{Sol}(A, b)$ è infinito. $\square$

Esempio

Esempio

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 - 2x_7 & = & 0 \\ x_3 + 6x_7 & = & 2 \\ x_5 + x_7 & = & 0 \end{cases}$$

in $x_1, \ldots, x_7$. Allora x_2, x_3, x_5 sono le incognite determinate, x_1, x_4, x_6, x_7 sono le incognite libere.

Esempio

Abbiamo

$$\mathrm{Sol}\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)$$

è

$$\left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ -2t_2+2t_4 \\ 2-6t_4 \\ t_2 \\ -t_4 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} \middle| \; t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbf{R} \right\}$$

Dove abbiamo prima imposto $x_1 = t_1, x_4 = t_2, x_6 = t_3, x_7 = t_4$, poi risolto per x_2, x_3, x_5.

Matrici

Definizione

Una *matrice (reale)* $m \times n$ è uno schema di mn numeri scritti in m righe di n numeri.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \ddots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Spesso una matrice sarà solo indicata con $A = (a_{i,j})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ o $A = (a_{i,j})$. Gli elementi a_{ij} saranno chiamati gli *elementi* della matrice.

Finora abbiamo utilizzato le matrici per avere un modo più semplice di scrivere un sistema di equazioni lineari e abbiamo esclusivamente applicato operazioni elementari sulle righe. Ora introdurremo altre tre operazione associate alle matrici.

Somma di matrico

Siano A e B matrici $m \times n$, cioè A e B hanno lo stesso numero di righe e di colonne. Allora definiamo la somma $A + B$ come

$$
\begin{aligned}
A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\
&:= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

In pratica, la somma di due matrici delle stesse dimensioni è semplicemente la matrice ottenuta sommando gli elementi che appaiono nella stessa posizione.

Moltiplicazione con un numero

Per una matrice $m \times n$ A e un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ definiamo il prodotto λA come

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Cioè moltiplichiamo tutti gli elementi della matrice con il numero λ.

Moltiplicazione di due matrici

Esiste anche un'operazione di prodotto tra due matrici. A prima vista potrebbe sembrare poco intuitivo, ma questa definizione tornerà utile in molte applicazioni.
Sia A una matrice $m \times n$ e B una matrice $n \times p$, cioè il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B. Allora il prodotto AB è una matrice $m \times p$ definita da

$$(AB)_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)$$

Ossia, l'elemento al posto (i, j) viene determinato dalla riga i di A e dalla colonna j di B; si moltiplica il primo elemento della riga i di A con il primo elemento della colonna j di B, il secondo elemento della riga i di A con il secondo elemento della colonna j di B, ecc., e si fa la somma di tutti questi prodotti.

Moltiplicazione di matrici

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

$$5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & 25 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 13 & 14 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 & 88 \\ 199 & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

Dove $199 = 4 * 11 + 5 * 13 + 6 * 15$.

Moltiplicazione di matrici

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ -8 & 11 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrici speciali

Esistono due matrici speciali che appariranno molto spesso. La matrice $0 := 0_{m \times n}$ è la matrice con tutti gli elementi zero. La martice I_n è la matrice $n \times n$ tale che

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

che ha tutti 1 nelle posizioni $(i, i)_{i=1,\dots,n}$ e zero altrove.

Regole di calcolo

Proposizione (Regole di calcolo con le matrici)

Sia A una matrice $m \times n$.

1. *Sia B una matrice $m \times n$ allora $A + B = B + A$.*
2. *Siano B, C matrici $m \times n$ allora $A + (B + C) = (A + B) + C$*
3. $A + 0 = 0 + A = A$.
4. *Sia B una matrice $n \times p$ e C una matrice $p \times q$ allora $(AB)C = A(BC)$.*
5. $I_m A = A I_n = A$.
6. *Siano B, C matrici $n \times p$ allora $A(B + C) = AB + AC$.*
7. *Sia B una matrice $m \times n$, C una matrice $n \times p$ allora $(A + B)C = AC + BC$.*

Regole di calcolo

Dimostrazione.

Tutti i punti si dimostrano calcolando ambo i lati delle uguaglianze e controllando che ogni elemento sia lo stesso. Ad esempio per la prima regola abbiamo che $A+B$ e $B+A$ sono matrici $m \times n$ e

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

e

$$(B+A)_{ij} = b_{ij} + a_{ij}.$$

Per due numeri reali α, β sappiamo che $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. Quindi $b_{ij} + a_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ per ogni i, j e $(A+B)_{ij} = (B+A)_{ij}$. $\square$

Regole di calcolo

Dimostrazione.

Le altre due properietà riguardo la somma si mostrano in modo simile. Le dimostrazioni per le regole del prodotto sono più complicate. Per mostrare la quarta regola, si nota che AB è una matrice $m \times p$ e

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{ij} &= \sum_{r=1}^{p} (AB)_{ir} C_{r,j} \\ &= \sum_{r=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kr} \right) C_{r,j} \end{aligned}$$

□

Regole di calcolo

Dimostrazione.

Similmente,

$$
\begin{aligned}
(A(BC))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(BC)_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \left(\sum_{r=1}^{p} B_{kr} C_{r,j} \right)
\end{aligned}
$$

Ed entrambe le espressioni sono uguali a:

$$
\sum_{k=1}^{m} \sum_{r=1}^{p} A_{ik} B_{kr} C_{r,j}
$$

$\square$

Regole di calcolo

Osservazione

Una regola che sembra mancare è $AB = BA$. Ci sono due ragioni per cui questa regola non appare. La prima è che se A è una matrice $m \times n$ e AB è definita allora B deve essere una matrice $n \times p$. Per poter definire BA abbiamo bisogno che $p = m$, cioè i due prodotti sono definiti contemporaneamente solo quando B è del tipo $n \times m$. In questo caso abbiamo che AB è una matrice $n \times n$ e BA è una matrice $m \times m$. Cioè per avere due matrici della stessa dimensione dobbiamo inoltre imporre $m = n$. Ma anche in questo caso non c'è sempre uguaglianza:

Regole di calcolo

Esempio

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare, $AB \neq BA$.

In particolare, si dice che il prodotto non è commutativo.

La matrice inversa

Adesso cominciamo discutendo una properietà che è solo rilevante per matrici quadrate, che sono matrici con lo stesso numero di righe e colonne.
Se prendiamo due matrici quadrate della stessa dimensione, cioè due matrici $n \times n$, allora il loro prodotto è di nuovo una matrice $n \times n$.

Definizione

Sia A una matrice $n \times n$. Chiamiamo una matrice B tale che

$$AB = BA = I_n$$

una matrice inversa di A. Se tale matrice esiste, diciamo che A è *invertibile*.

La matrice inversa

Studieremo più avanti alcuni criteri per decidere se una data matrice sia o meno invertibile. Per ora vogliamo studiare alcune proprietà di queste matrici.
Per esempio la matrice inversa, se esiste, è unica:

Proposizione

Sia A una matrice invertibile. Siano B e C matrici inverse di A. Allora $B = C$.

Dimostrazione.

Sappiamo che

$$AB = BA = I_n \text{ e } AC = CA = I_n$$

Allora

$$C \overset{(5)}{=} I_n C = (BA)C \overset{(4)}{=} B(AC) = BI_n \overset{(5)}{=} B$$

dove abbiamo applicato le varie regole del calcolo matriciale. $\square$