Lezione 3 - Geometria per Astronomia e Fisica

Remke Kloosterman

Unipd

2020

La matrice inversa

Adesso cominciamo discutendo una properietà che è solo rilevante per matrici quadrate, che sono matrici con lo stesso numero di righe e colonne.
Se prendiamo due matrici quadrate della stessa dimensione, cioè due matrici $n \times n$, allora il loro prodotto è di nuovo una matrice $n \times n$.

Definizione

Sia A una matrice $n \times n$. Chiamiamo una matrice B tale che

$$AB = BA = I_n$$

una matrice inversa di A. Se tale matrice esiste, diciamo che A è *invertibile*.

La matrice inversa

Studieremo più avanti alcuni criteri per decidere se una data matrice sia o meno invertibile. Per ora vogliamo studiare alcune proprietà di queste matrici.
Per esempio la matrice inversa, se esiste, è unica:

Proposizione

Sia A una matrice invertibile. Siano B e C matrici inverse di A. Allora $B = C$.

Dimostrazione.

Sappiamo che

$$AB = BA = I_n \text{ e } AC = CA = I_n$$

Allora

$$C = I_n C = (BA)C = B(AC) = BI_n = B$$

dove abbiamo applicato le varie regole del calcolo matriciale. □

La matrice inversa

Quindi la matrice inversa, se esiste, è unica. In questo caso la denoteremo con A^{-1}.

Esempio

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Se $ad - bc \neq 0$ allora

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

La matrice inversa

Proposizione

Siano A e B matrici $n \times n$ e invertibili allora AB è invertibile e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Se A è invertibile allora A^{-1} è anche invertibile e $(A^{-1})^{-1} = A$.

Dimostrazione.

Vale

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(I_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

e in modo simile per $(B^{-1}A^{-1})(AB)$. Quindi AB è invertibile e la matrice inversa è $B^{-1}A^{-1}$.
Da $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ segue anche che A^{-1} è invertibile con inversa A. $\square$

Matrici elementari

Adesso vogliamo studiare il rapporto tra moltiplicazione di matrici e operazioni elementari sulle righe.

Matrici elementari

Definizione

Chiamiamo le seguenti matrici $n \times n$ *matrici elementari*. Per $1 \leq i < j \leq n$ definiamo

$$P(i,j) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 0 & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Matrici elementari

Questa matrice ha solo 1 sulla diagonale, con l'eccezione del posto (i,i) e (j,j) dove l'entrata è 0. Fuori dalla diagonale ci saranno solamente entrate con valore 0 con l'eccezione degli elementi in posizione (i,j) e (j,i) dove c'è un 1.

Operazioni sulle righe e matrici elementari

Definizione

Per $i, j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i, j \leq n$ e $i \neq j$ e un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ definiamo

$$S(i,j;\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice è uguale ad I_n con l'eccezione dell'entrata (i, j), dove c'è il valore λ.

Matrici elementari

Definizione

Per $i \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq n$ e un numero $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che $\lambda \neq 0$ definiamo

$$M(i;\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice è uguale ad I_n con l'eccezione che dell'entrata (i, i) dove c'è il valore λ.

Matrici elementari

Si controlla facilmente che

$$\begin{aligned} S(i,j;\lambda)S(i,j;-\lambda) = S(i,j;-\lambda)S(i,j;\lambda) &= I_n \\ M(i;\lambda)M(i;\frac{1}{\lambda}) = M(i;\frac{1}{\lambda})M(i;\lambda) &= I_n \\ P(i,j)P(i,j) &= I_n \end{aligned}$$

In particolare $P(i,j)$, $S(i,j;\lambda)$ e $M(i,\lambda)$ sono invertibili e

$$P(i,j)^{-1} = P(i,j);\ S(i,j;\lambda)^{-1} = S(i,j;-\lambda)$$

$$M(i;\lambda)^{-1} = M(i,\frac{1}{\lambda})$$

Sia adesso A una matrice $m \times n$ e sia E una matrice elementare, vogliamo studiare i prodotti EA.

Operazioni sulle righe e matrici elementari

Proposizione

Sia A una matrice $n \times p$.

- *$P(i, j)A$ è la matrice ottenuta da A scambiando le righe i e j.*
- *$S(i, j; \lambda)A$ è la matrice ottenuta da A sommando λ volte la riga j alla riga i.*
- *$M(i, \lambda)A$ è la matrice ottenuta da A moltiplicando la riga i con λ.*

Dimostrazione.

Questo si controlla con un calcolo diretto. $\square$

Operazioni sulle righe e matrici elementari

Grazie a questa proposizione possiamo introdurre un metodo per il calcolo dell'inversa di una matrice.

Lemma

Sia A una matrice $n \times n$. Allora la forma a scala di A contiene una riga con solo zeri oppure I_n è una forma a scala di A.

Dimostrazione.

Applichiamo il procedimento dell'eliminazione di Gauß ad A fino ad arrivare ad una matrice A' in forma a scala ridotta. Se non c'è nessuna riga con solo zeri, allora abbiamo n pivots su n righe. Quindi ogni colonna contiene un pivot. Cioè i pivot sono ai posti (i,i). In particolare $A_{i,j} = 0$ per $i \neq j$. Per $i = 1, \ldots n$ possiamo moltiplicare la riga i con $\frac{1}{a_{i,i}}$ e trovare così la matrice I_n. $\square$

Operazioni sulle righe e matrici elementari

Proposizione

Sia A una matrice $n \times n$. Se I_n è una forma a scala di A allora A è invertible.

Operazioni sulle righe e matrici elementari

Dimostrazione.

Ogni operazione elementare è equivalente a moltiplicare a sinistra con una matrice elementare. Quindi quando I_n è una forma a scala di A allora ci sono delle matrici elementari $E_1, \ldots, E_t$ tali che

$$E_t E_{t-1} \ldots E_1 A = I_n$$

Ogni matrice elementare è invertibile e così anche il loro prodotto è invertibile. Quindi

$$A = (E_1 \ldots E_t)^{-1}$$

Ma questo implica che anche A è invertible e

$$A^{-1} = E_t \ldots E_1$$

$\square$

Calcolo della matrice inversa

Osservazione
Piu tardi mostreremo che, se I_n non è una forma a scala di A, allora A non è invertibile.

Osservazione
Per non dover calcolare il prodotto delle matrici elementari, possiamo utilizzare il seguente metodo. Cominciamo con la matrice $n \times 2n$ $(A|I_n)$ e applichiamo la procedura di Gauß. Ci fermeremo quando una riga a sinistra della $|$ è zero, altrimenti si arriverà ad ottenere la matrice I_n a sinistra e troviamo una matrice della forma

$$(I_n|B).$$

Calcolo della matrice inversa

Osservazione

Ora ci basterà ricostruire il procedimento utilizzato pensando alle matrici elementari. Siano $E_1, \ldots, E_t$ le matrici elementari t.c.

$$E_t \ldots E_1(A|I_n) = (I_n|B)$$

Dato che

$$E_t \ldots E_1(A|I_n) = (E_t \ldots E_1 A|E_t \ldots E_1 I_n),$$

segue che $B = E_t \ldots E_1$ e $A^{-1} = E_t \ldots E_1 = B$.
Cioè cominciando con $(A|I_n)$ troviamo $(I_n|A^{-1})$.

Calcolo della matrice inversa

Con una seria di applicazione sulle righe troviamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcolo della matrice inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

Calcolo della matrice inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Calcolo della matrice inversa

Esempio

Sia A una matrice $m \times n$ e sia $b \in \mathbf{R}^m$. Allora il sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

si puo riscrive come

$$Ax = b$$

dove

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Calcolo della matrice inversa

Esempio

Assumiamo adesso che $m = n$ e A è invertible. Allora se $x \in \mathrm{Sol}(A, b)$ troviamo che $Ax = b$ e quindi

$$x = I_n x = (A^{-1}A)(x) = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b.$$

Quindi, l'unica soluzione possibile è $A^{-1}b$. Dal fatto che $A(A^{-1}b) = I_n b = b$ segue che è veramente una soluzione. In questo caso troviamo

$$\mathrm{Sol}(A, b) = \{A^{-1}b\}.$$

La matrice trasposta

L'ultima operazione sulle matrici che volgiamo discutere è la trasposta.

Definizione

Sia A una matrice $m \times n$. Allora la trasposta A^T di A è la matrice $n \times m$ definita da

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice trasposta

Proposizione

Siano A, B matrici $m \times n$, sia C una matrice $n \times p$.

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
3. $(A^T)^T = A$.
4. $(AC)^T = C^T A^T$.
5. *Se A è invertibile allora anche A^T è invertibile e si ha* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

La matrice trasposta

Dimostrazione.
Per il primo punto $(A+B)^T = A^T + B^T$ si nota

$$((A+B)^T)_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = A^T_{ij} + B^T_{ij}$$

Il secondo e terzo punto si dimostrano in mode simile. $\square$

La matrice trasposta

Dimostrazione.

Per il quarto punto $(AC)^T = C^T A^T$:

$$\begin{aligned}
(AC)^T_{ij} &= (AC)_{ji} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{jk} C_{ki} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (A^T)_{kj} C^T_{ik} \\
&= \sum_{k=1}^{n} C^T_{ik} (A^T)_{kj} \\
&= (C^T A^T)_{ij}
\end{aligned}$$

$\square$

La matrice trasposta

Dimostrazione.
L'ultimo punto $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ segue da

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n$$

e

$$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$$

$\square$