3. Tutorato 2

(1) Si indichino cinque vettori di $\mathbf{R}^4$ tali che ogni combinazione di quattro di essi è linearmente indipendente.

(2) Si dimostri che la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ha rango 2 se e solo $ad - bc \neq 0$.

(3) Si determini il rango delle seguenti tre matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(4) (a) Dato $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (2, -1, 2)$, $v_3 = (1, 7, -5) \in \mathbf{R}^3$. È vero che $v_3 \in \mathrm{span}(v_1, v_2)$?

(b) Si scriva $f = x^2 + 4x - 3 \in \mathbf{R}[x]_{\leq 2}$ come combinazione lineare di $g_1 = x^2 - 2x - 5$, $g_2 = 2x^2 + 3$ e $g_3 = x + 3$.

(c) Si dimostri che i vettori $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ e $v_3 = (0, 1, 1)$ sono generatori di $\mathbf{R}^3$.

(5) Si calcoli la dimensione dell'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} (\lambda+1)x_1 + (-\lambda^2 + 6\lambda - 9)x_2 + (\lambda - 2)x_3 &= 0 \\ (\lambda^2 - 2\lambda - 3)x_1 + (\lambda^2 - 6\lambda + 9)x2 + 3x_3 &= 0 \\ (\lambda+1)x_1 + (-\lambda^2 + 6\lambda - 9)x_2 + (\lambda + 1)x_3 &= 0 \end{aligned}$$

al variare di λ.