Soluzione Tutorato 2

(1) Si indichino cinque vettori di $\mathbf{R}^4$ tali che ogni combinazione di quattro di essi è linearmente indipendente.

Soluzione: Consideriamo i vettori e_1, e_2, e_3, e_4 di $\mathbf{R}^4$. Questi vettori sono linearmente indipendenti e se ora prendiamo la loro somma (o una qualsiasi combinazione lineare) otteniamo ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questo vettore insieme ad altri 3 qualsiasi dei 4 vettori inizialmente considerati sono ancora linearmente indipendenti.

(2) Si dimostri che la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ha rango 2 se e solo $ad - bc \neq 0$.

Soluzione: Per vedere il rango della matrice iniziamo ponendo il primo elemento della seconda riga a 0. Quindi sottraiamo alla seconda riga la prima moltiplicata per c/a (valido nel caso in cui $a \neq 0$)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II-Ix(c/a)}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{pmatrix}$$

La matrice ha rango 2 (possiede 2 pivot) se e solo se $ad - bc \neq 0$.

Nel caso in cui invece $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}\leftrightarrow\text{ I}} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Ora se b e c sono diverso da 0 la matrice ha rango 2 (effettivamente si ha che $ad - bc \neq 0$). Se $b = 0$ o $c = 0$ allora la matrice ha rango 0 o 1 (e $ad - bc = 0$).

(3) Si determini il rango delle seguenti tre matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione:

Dobbiamo cercare una forma a scala della matrice per trovarne il rango, che corrisponde al numero di pivot della matrice stessa. Esempio:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+I} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango 2.}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[II-3\cdot I]{II-2\cdot I} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango 1.}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I\leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[III+2\cdot I]{II+2\cdot I} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5}III]{-\frac{1}{7}II} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III-II}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo così che il rango di A_3 è 2.

(4) (a) Dato $v_1 = (1,2,-1)$, $v_2 = (2,-1,2)$, $v_3 = (1,7,-5) \in \mathbf{R}^3$. È vero che $v_3 \in \text{span}(v_1, v_2)$?

Soluzione: Per definizione se $v_3 \in \text{span}(v_1, v_2)$ il vettore v_3 deve essere una combinazione lineare dei vettori v_1 e v_2. Dunque considerando λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbf{R}$:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = v_3$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & 1 \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & = & 7 \\ -\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & = & -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & 3 \\ \lambda_2 & = & -1 \end{cases}$$

Dunque $v_3 \in span(v_1, v_2)$.

(b) Si scriva $f = x^2 + 4x - 3 \in \mathbf{R}[x]_{\leq 2}$ come combinazione lineare di $g_1 = x^2 - 2x - 5$, $g_2 = 2x^2 + 3$ e $g_3 = x + 3$.

Scriviamo f come combinazione lineare di g_1, g_2, g_3. considerando $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbf{R}$:

$$f = \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \mu_3 g_3$$

Dati:

$$g_1 = x^2 - 2x - 5$$

$$g_2 = 2x^2 + 3$$

$$g_3 = x + 3$$

Otteniamo:

$$x^2 + 4x - 3 = x^2(\mu_1 + 2\mu_2) + x(\mu_3 - 2\mu_1) + 3(\mu_3 + \mu_2 - \frac{5}{3}\mu_1)$$

$$\begin{cases} \mu_1 & + & 2\mu_2 & & & = & 1 \\ -2\mu_1 & & & + & \mu_3 & = & 4 \\ -\frac{5}{3}\mu_1 & + & \mu_2 & + & \mu_3 & = & -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mu_1 & = & 33 \\ \mu_2 & = & -16 \\ \mu_3 & = & 70 \end{cases}$$

$$f = 33g_1 - 16g_2 + 70g_3$$

(c) Si dimostri che i vettori $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,-1)$ e $v_3 = (0,1,1)$ sono generatori di $\mathbf{R}^3$.

Soluzione: Per essere generatori devo poter scrivere un qualsiasi vettore di $\mathbf{R}^3$ come combinazione lineare dei tre vettori. Prendiamo un vettore $(a,b,c)^T \in \mathbf{R}^3$ e $a, b, c, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbf{R}$:

$$\mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mu_1 & & & & & = & a \\ \mu_1 & + & \mu_2 & + & \mu_3 & = & b \\ \mu_1 & - & \mu_2 & + & \mu_3 & = & c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mu_1 & = & a \\ \mu_2 & = & \frac{b-c}{2} \\ \mu_3 & = & -a + \frac{(b+c)}{2} \end{cases}$$

(5) Si calcoli la dimensione dell'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{array}{rcl}(\lambda+1)x_1+(-\lambda^2+6\lambda-9)x_2+(\lambda-2)x_3 & = & 0\\ (\lambda^2-2\lambda-3)x_1+(\lambda^2-6\lambda+9)x2+3x_3 & = & 0\\ (\lambda+1)x_1+(-\lambda^2+6\lambda-9)x_2+(\lambda+1)x_3 & = & 0\end{array}$$

al variare di λ.

Soluzione: Cerchiamo le dimensioni dell'insieme delle soluzioni del sistema. Iniziamo semplificando la matrice dei coefficenti:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda+1 & -\lambda^2+6\lambda-9 & \lambda-2 & 0\\ \lambda^2-2\lambda-3 & \lambda^2-6\lambda+9 & 3 & 0\\ \lambda+1 & -\lambda^2+6\lambda-9 & \lambda+1 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{(III-I)x(1/3)}}\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda+1 & -\lambda^2+6\lambda-9 & \lambda-2 & 0\\ \lambda^2-2\lambda-3 & \lambda^2-6\lambda+9 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{II-(3xIII)}]{\text{I-(IIIx(}\lambda\text{-2))}}\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda+1 & -\lambda^2+6\lambda-9 & 0 & 0\\ \lambda^2-2\lambda-3 & \lambda^2-6\lambda+9 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Possiamo riscrivere la matrice nel seguente modo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda+1 & -(\lambda-3)^2 & 0 & 0\\ (\lambda+1)(\lambda-3) & (\lambda-3)^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Non consideriamo al momento il caso con $\lambda = 3$ e consideriamo solo soluzioni con $\lambda \gtrless 3$ Possiamo quindi dividere la seconda riga per $(\lambda-3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda+1 & -(\lambda-3)^2 & 0 & 0\\ \lambda+1 & \lambda-3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{II-I}}\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda+1 & -(\lambda-3)^2 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-3)^2+\lambda-3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Ora nel caso che $\lambda+1 \gtrless 0$ e che $(\lambda-3)^2+\lambda-3 \gtrless 0$ abbiamo tre pivot e l'unica soluzione :

$$\begin{cases} x_1 & = & 0\\ x_2 & = & 0\\ x_3 & = & 0\end{cases}$$

Si nota che: $(\lambda-3)^2+\lambda-3 = (\lambda-3)(\lambda-3+1) = (\lambda-3)(\lambda-2)$.

Sono rimasti dunque solo i casi in cui $\lambda = -1, 2, 3$.

Se $\lambda = -1$ si trova il sistema $x_2 = x_3 = 0$ quindi $(1,0,0)^T$ una base dello spazio delle soluzioni.

Se $\lambda = 2$ si trova il sistema $x_2 = 3x_1$ e $x_3 = 0$ quindi $(1,3,0)^T$ una base dello spazio delle soluzioni.

Se $\lambda = 3$ si trova il sistema $x_1 = x_3 = 0$ quindi $(0,1,0)^T$ una base dello spazio delle soluzioni.

Abbiamo quindi che per $\lambda = -1, 2, 3$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1, per qualsiasi altro λ invece la dimensione è 0.

4. Didattica integrativa 2

(1) Sia $n \in \mathbf{N}$ un intero tale che $n \geq 2$. Sia $\mathcal{D}_n \subset M_{n\times n}(\mathbf{R})$ l'insieme delle matrici triangolari superiori, cioè l'insieme di tutte le matrici $A = (a_{i,j}) \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$, tali che $a_{i,j} = 0$ se $i > j$.
   (a) Si dimostri che $\mathcal{D}_n$ è un sottospazio vettoriale di $M_{n\times n}(\mathbf{R})$.
   (b) Si dimostri che il prodotto di due matrici in $\mathcal{D}_n$ è di nuovo in $\mathcal{D}_n$.
   (c) Si dimostri che un $A \in \mathcal{D}_n$ è invertibile se e solo se
$$a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \neq 0$$
   (d) Si dimostri che se $A \in \mathcal{D}_n$ e A è invertibile, allora $A^{-1} \in \mathcal{D}_n$.

(2) Sia d un intero positivo. Sia $V = \mathbf{R}[x]_{\leq d}$. Si determini se $W \subset V$ è un sottospazio se
   (a) W consiste di tutti i polinomi $a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$ tali che ogni $a_i \in \mathbf{N}$.
   (b) $W = \{p \in V \mid p(1) = 0\}$.
   (c) W consiste di tutti i polinomi della forma $b_kx^{2k} + b_{k-1}x^{2k-2} + \dots + b_1x^2 + b_0$, con $b_i \in \mathbf{R}$ per ogni i (dove $2k \leq d$).

(3) Sia $V = \mathbf{R}[x]_{\leq 2}$. Prendiamo $p_1 = x^2 + x + 1$, $p_2 = x^2 + x$, $p_3 = x + 1$.
   (a) Si dimostri che $\{p_1, p_2, p_3\}$ è una base di V.
   (b) Si scrivano i seguenti $q_i \in V$ come combinazione lineare di p_1, p_2, p_3
      (i) $q_1 = x$.
      (ii) $q_2 = x^2 + 3x + 1$.
      (iii) $q_3 = -2x^2 - 6x - 2$.
   (c) Si determini una base B di $\mathrm{span}(q_1, q_2, q_3)$ e si estenda B ad una base per V.

(4) Siano $a, b, c \in \mathbf{R}$. Si dimostri che i tre vettori
$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$$
sono una base di $\mathbf{R}^3$ se e solo se $a \neq b$, $a \neq c$ e $b \neq c$.