Soluzioni Tutorato 1

(1) Si risolva

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 & = & 6 \\ 4x_1 + 2x_2 & = & -12 \end{cases}$$

Soluzione: La matrice completa associata al sistema è:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -6 & 6 \\ 4 & 2 & -12 \end{array}\right)$$

Per trovare la soluzione al sistema riportiamo la matrice in una forma a scala applicando delle operazioni elementari sulle righe della matrice.

Dividiamo la prima riga per 3 e la seconda per 2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

Sottraiamo alla seconda riga due volte la prima riga:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -10 \end{array}\right)$$

Dividiamo la seconda riga per 5:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Quindi $x_2 = -2$, che inserito nella equazione della prima riga, $x_1 - 2x_2 = 2$, si ottiene $x_1 = -2$.

(2) Si determini $\mathrm{Sol}(A, b)$ nei casi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ -5 & 1 & -7 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -21 \end{pmatrix}.$$

e

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 15 \\ 1 & 8 & -10 \\ -2 & -16 & 20 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -137 \\ 203 \\ -21 \end{pmatrix}.$$

Soluzione:

Per determinare $\mathrm{Sol}(A|b)$ scriviamo la matrice completa $(A|b)$ ed eseguiamo le seguenti operazioni sulle sue righe:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & 5 & 9 \\ -5 & 1 & -7 & -21 \end{array}\right) \xrightarrow[II-3\cdot I]{III+5\cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -10 & 8 & 12 \\ 0 & 11 & -12 & -26 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}\cdot II]{III+II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -141 \end{array}\right)$$

Scambiamo quindi la seconda e la terza riga, e sulla matrice ottenuta sostituiamo la terza riga con quella ottenuta sommando alla terza riga 5 volte la seconda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & -16 & -64 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{16}\cdot III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Si vede quindi che la soluzione del sistema ha $x_3 = 4$, sostituendo quindi nella seconda equazione si ricava $x_2 = 2$ ed infine $x_1 = -1$ dalla prima. Perciò

$$\mathrm{Sol}(A|b) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Determiniamo $\mathrm{Sol}(A|b)$ nel secondo caso: la matrice completa del sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 15 & -137 \\ 1 & 8 & -10 & 203 \\ -2 & -16 & 20 & -21 \end{array}\right)$$

che, dopo aver scambiato tra di loro la prima e la seconda riga diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -10 & 203 \\ 2 & -3 & 15 & -137 \\ -2 & -16 & 20 & -21 \end{array}\right) \xrightarrow[III+2\cdot I]{II-2\cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -10 & 203 \\ 0 & -19 & 35 & -543 \\ 0 & 0 & 0 & 385 \end{array}\right)$$

La terza riga in questo caso è nel formato:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & b_r \end{array}\right)$$

con $b_r \neq 0$. Il sistema non ha soluzioni.

(3) Per quale $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ abbiamo che $\mathrm{Sol}(A, b)$ ha più di un elemento?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & \alpha & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Soluzione: Cerchiamo α e β tali che $\mathrm{Sol}(A, b)$ abbia più di un elemento: per prima cosa, scambiamo le prime due righe tra di loro, quindi abbiamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & \alpha & 2 & \beta \end{array}\right) \xrightarrow{III-I} II - 3 \cdot I \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -10 & 10 & -20 \\ 0 & \alpha - 3 & 4 & \beta - 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{10}\cdot II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \alpha - 3 & 4 & \beta - 6 \end{array}\right) \xrightarrow{III-(\alpha-3)\cdot II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha + 1 & \beta - 2\alpha \end{array}\right)$$

Se $\alpha \neq -1$ otteniamo un unica soluzione:

$$\mathrm{Sol}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2\alpha-\beta}{\alpha+1} \\ \frac{\beta+2}{\alpha+1} \\ \frac{\beta-2\alpha}{\alpha+1} \end{pmatrix} \right\}$$

Per $\alpha = -1$ e $\beta \neq -2$ il sistema non ha soluzioni:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta + 2 \end{array}\right)$$

Per $\alpha = 1$ e $\beta = -2$ il sistema ha infinite soluzioni:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

con $x_1 = -x_3$ e $x_2 = 2 + x_3$.

(4) Si determini un sistema di tre equazioni lineari con tre incognite tali che $\mathrm{Sol}(A,b) = \{(t,-2,5) \mid t \in \mathbf{R}\}$.

Soluzione: Un sistema di equazioni lineare a tre incognite tali che $\mathrm{Sol}(A,b) = \{(t,-2,5)\}$ può essere:

$$\begin{cases} x_2 & = & -2 \\ x_3 & = & 5 \end{cases}$$

Ma anche:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 & = & 3 \\ \quad x_3 & = & 5 \end{cases}$$

(5) Si considerino le seguenti matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ -7 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Si determinino tutti gli $i, j \in \{1,2,3,4,5\}$ tali che il prodotto A_iA_j esiste, e si calcoli tale prodotto.

Soluzione: La moltiplicazione tra due matrici è possibile solo nel caso in cui il numero di colonne della prima matrice sia uguale al numero di righe della seconda matrice. Le uniche moltiplicazioni possibili sono: A_1A_2, A_3A_2, A_4A_1, A_5A_4.

Esempio:

$$A_3A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 8 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}$$

(6) Si considerino le seguenti matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per quali i abbiamo che A_i è invertibile? Se A_i è invertibile si determini A_i^{-1}.

Soluzione: Una matrice è innanzitutto invertibile se è una matrice quadrata $(n \times n)$. Dunque A_1 non è invertibile in quanto il numero di righe è diverso dal numero di colonne ed anche A_3 non lo è, in quanto $ad - bc = 0$.

Calcoliamo come esempio A_4^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Iniziamo mettendo la seconda riga come prima, la prima come terza e la terza come seconda:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{IIIx1/2}]{\text{III-(IIx6)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{I+II}]{\text{I-III)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Quindi:

$$A_4^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$