2. Didattica integrativa 1

(1) Si indichi per quali $\lambda \in \mathbf{R}$ non ci sono, c'è una unica soluzione, o ci sono un numero infinito di soluzioni.

$$\begin{aligned}(\lambda+1)x_1+(-\lambda^2+6\lambda-9)x_2+(\lambda-2)x_3 &= 1\\ (\lambda^2-2\lambda-3)x_1+(\lambda^2-6\lambda+9)x2+3x_3 &= \lambda-3\\ (\lambda+1)x_1+(-\lambda^2+6\lambda-9)x_2+(\lambda+1)x_3 &= 1\end{aligned}$$

In ognuno dei casi si determini l'insieme delle soluzioni.

(2) (a) Sia A una matrice $n \times n$ tale che $A \cdot A = 0$. Si dimostri che $I_n + A$ è la matrice inversa di $I_n - A$.

(b) Sia A una matrice $n \times n$ tale che $A \cdot A \cdot A = 0$. Si dimostri che $I_n + A + A^2$ è la matrice inversa di $I_n - A$.

(c) Sia A una matrice $n \times n$ tale che per un intero k abbiamo $A^k = 0$, ma $A^{k-1} \neq 0$. Si dimostri che $I_n - A$ è invertibile.

(3) Siano V uno spazio vettoriale e U_1, U_2 sottospazi. Si dimostri che $U_1 \cap U_2$ è un sottospazio. Si dia un esempio di uno spazio V e di sottospazi U_1, U_2 tali che $U_1 \cup U_2$ non è un sottospazio.

(4) (Difficile) Dato $(V, \oplus, \odot)$ come sotto. In quali casi abbiamo che $(V, \oplus, \odot)$ è uno spazio vettoriale?

(a) $V = \mathbf{R}_{>0}$;
$x \oplus y = x + y$;
$\lambda \odot x = \lambda x$.

(b) $V = \mathbf{R}_{>0}$;
$x \oplus y = xy$;
$\lambda \odot x = x^\lambda$.

(c) $V = \mathbf{R} \times \mathbf{R}_{>0}$;
$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, \frac{y_1 y_2}{2})$;
$\lambda \odot (x, y) = (\lambda x, 2^{1-\lambda} y^\lambda)$

(d) $V = \{A \in M_{n\times n}(\mathbf{R}) \mid A^T = A\}$;
$A \oplus B = A + B$;
$\lambda \cdot A = \lambda A$.