Supporto alla didattica 1 - 19-23/10/2020 - Soluzioni

Esercizio 1

Per prima cosa scriviamo la matrice completa del sistema lineare e fattorizziamo ove possibile i coefficienti in cui compare λ, ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda+1 & -(\lambda-3)^2 & \lambda-2 & 1 \\ (\lambda+1)(\lambda-3) & (\lambda-3)^2 & 3 & \lambda-3 \\ \lambda+1 & -(\lambda-3)^2 & \lambda+1 & 1 \end{array}\right)$$

Procediamo adesso alla riduzione a scala: per ottenere 0 in posizione $(2,1)$ moltiplichiamo la prima riga per $-(\lambda-3)$ e la sommiamo alla seconda, mentre per ottenere 0 in posizione $(3,1)$ sottraiamo la prima riga dalla terza. Al termine di queste operazioni la situazione è la seguente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda+1 & -(\lambda-3)^2 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & (\lambda-3)^2(\lambda-2) & 3-(\lambda-3)(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

La terza riga corrisponde all'equazione $3x_3 = 0$, che dà $x_3 = 0$; dobbiamo adesso vedere cosa succede nelle rimanenti equazioni. La seconda riga diventa, dato che $x_3 = 0$, $(\lambda-3)^2(\lambda-2)x_2 = 0$, e dobbiamo distinguere due casi:

1. $\lambda \neq 2, 3$: il coefficiente $(\lambda-3)^2(\lambda-2)$ è diverso da 0 e quindi otteniamo $x_2 = 0$. A questo punto la prima equazione diventa $(\lambda+1)x_1 = 1$ e dobbiamo fare un'ulteriore distinzione:
   - $\lambda \neq -1$: il coefficiente $\lambda+1$ è non nullo, quindi otteniamo $x_1 = \frac{1}{\lambda+1}$.
   - $\lambda = -1$: la prima equazione diventa $0x_1 = 1$ ed è quindi impossibile.
2. $\lambda = 2$ o $\lambda = 3$: in questo caso la seconda equazione diventa $0x_2 = 0$ ed è quindi risolta da qualsiasi valore di x_2. Se $\lambda = 2$ la prima equazione diventa $3x_1 - x_2 = 1$ che dà $x_1 = \frac{1+x_2}{3}$; se $\lambda = 3$ la prima equazione diventa $4x_1 - 0x_2 = 1$ che dà $x_1 = \frac{1}{4}$.

Ricapitoliamo i risultati:

1. Se $\lambda \neq -1, 2, 3$ il sistema ammette una sola soluzione: $x_1 = \frac{1}{\lambda+1}$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$
2. Se $\lambda = -1$ il sistema non ammette soluzione.
3. Se $\lambda = 2$ il sistema ammette infinite soluzioni: $x_1 = \frac{1+x_2}{3}$, $x_2 \in \mathbf{R}$ e $x_3 = 0$.
4. Se $\lambda = 3$ il sistema ammette infinite soluzioni: $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 \in \mathbf{R}$ e $x_3 = 0$.

Esercizio 2

Ricordiamo che per definizione una matrice quadrata $A \in M_{n\times n}(\mathbf{K})$ è invertibile se esiste una matrice $B \in M_{n\times n}(\mathbf{K})$ tale che $AB = BA = I_n$.

(a) $(I_n+A)(I_n-A) = I_n - A + A - A^2 = I_n$ e $(I_n-A)(I_n+A) = I_n + A - A - A^2 = I_n$ ed abbiamo finito.

(b) $(I_n+A+A^2)(I_n-A) = I_n - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I_n$ e $(I_n-A)(I_n+A+A^2) = I_n + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I_n$ ed abbiamo finito.

Sia in questo caso che nel precedente ci saremmo potuti limitare a fare uno solo dei due conti, visto che le moltiplicazioni tra matrici coinvolgono solo l'identità I_n e potenze di A.

(c) Dobbiamo trovare una matrice $n \times n$ B tale che $B(I_n - A) = (I_n - A)B = I_n$, e i due punti precedenti ci suggeriscono abbastanza esplicitamente che una "candidata inversa" da testare è $(I_n + A + \cdots + A^{k-1})$; grazie all'osservazione fatta al punto precedente, possiamo limitarci ad un solo conto:

$(I_n+A+\cdots+A^{k-1})(I_n-A) = I_n - A + A - A^2 + A^2 + \cdots - A^{k-1} + A^{k+1} - A^k = I_n$ visto che le potenze di A diverse da A^k compaiono una volta col segno $+$ e una col segno $-$.

Esercizio 3

Dobbiamo dimostrare che $U_1 \cap U_2$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari, e dare un esempio di U_1 e U_2 tali che $U_1 \cup U_2$ invece non soddisfi questa condizione. Cominciamo dalla prima parte:

- Siano $u, v \in U_1 \cap U_2$, allora in particolare $u, v \in U_1$ che è uno sottospazio vettoriale; di conseguenza $u + v \in U_1$. Ma possiamo ripetere il ragionamento utilizzando U_2 invece di U_1, ottenendo $u + v \in U_2$. Di conseguenza $u + v \in U_1 \cap U_2$ ed abbiamo dimostrato la chiusura rispetto alla somma.

- Siano $\lambda \in \mathbf{R}$ e $u \in U_1 \cap U_2$, allora in particolare $u \in U_1$ che è uno sottospazio vettoriale; di conseguenza $\lambda u \in U_1$. Di nuovo, possiamo ripetere il ragionamento utilizzando U_2 e ottenere $\lambda u \in U_2$. Di conseguenza $\lambda u \in U_1 \cap U_2$ ed abbiamo dimostrato la chiusura rispetto al prodotto per scalari.

Per quanto riguarda la seconda parte, un esempio è il seguente. Definiamo $V := \{(a,b)|a,b \in \mathbf{R}\}$ con le operazioni date da $(a,b)+(c,d) := (a+c, b+d)$ e $\lambda(a,b) := (\lambda a, \lambda b)$, e $U_1 := \{(a,0)|a \in \mathbf{R}\}$, $U_2 := \{(0,b)|b \in \mathbf{R}\}$; non è difficile verificare che V è uno spazio vettoriale e che U_1 e U_2 sono sottospazi, ed è immediato osservare che $U_1 \cup U_2$ non è chiuso rispetto alla somma: infatti se $a, b \neq 0$ abbiamo $(a,0), (0,b) \in U_1 \cup U_2$ ma $(a,0) + (0,b) = (a,b) \notin U_1, U_2$.

In effetti, per l'unione di sottospazi vettoriali vale il seguente risultato (di facile dimostrazione)

Proposizione. *Sia V uno spazio vettoriale e siano $U, W \subseteq V$ sottospazi vettoriali; $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V se e solo se $U \subseteq W$ o $W \subseteq U$.*

Esercizio 4

Dobbiamo verificare se i vari insiemi V assieme alle rispettive operazioni di "somma" e "prodotto per scalari" (convenzionalmente indicate con $\oplus$ e $\odot$) soddisfano le proprietà degli spazi vettoriali.

(a)

$(V, \oplus, \odot)$ NON è uno spazio vettoriale per varie ragioni. La prima è che l'operazione $\odot$ non è interna a V: se $\lambda \in \mathbf{R}_{<0}$ allora, quale che sia $v \in V$, $\lambda \odot v = \lambda v \notin V$ visto che $\lambda v < 0$. Inoltre V manca di elemento neutro rispetto a $\oplus$ (o vettore nullo che dir si voglia): se esistesse $e \in V$ tale che $x \oplus e = x$ per ogni $x \in V$ allora avremmo $e + x = x$ per ogni $x \in V$ (visto che in questo caso $\oplus$ coincide con l'usuale somma $+$ su $\mathbf{R}$), ma questo implica $e = 0$ cioè $e \notin V$ (visto che $V = \mathbf{R}_{>0}$).

(b)

Siano $u, v, w \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$:

- $(u \oplus v) \oplus w = uv \oplus w = uvw = u \oplus (vw) = u \oplus (v \oplus w)$ quindi $\oplus$ è associativa.
- L'elemento neutro rispetto a $\oplus$ è 1: infatti $u \oplus 1 = u \cdot 1 = u = 1 \cdot u = 1 \oplus u$.
- Ogni $v \in V$ ha un opposto: $v \oplus \frac{1}{v} = v\frac{1}{v} = 1 = \frac{1}{v}v = \frac{1}{v} \oplus v$.
- $u \oplus v = uv = vu = v \oplus u$ quindi $\oplus$ è commutativa.
- $\lambda \odot (u \oplus v) = \lambda \odot (uv) = (uv)^\lambda = u^\lambda v^\lambda = u^\lambda \oplus v^\lambda = (\lambda \odot u) \oplus (\lambda \odot v)$.
- $(\lambda + \mu) \odot v = v^{\lambda+\mu} = v^\lambda v^\mu = v^\lambda \oplus v^\mu = (\lambda \odot v) \oplus (\mu \odot v)$.
- $\lambda \odot (\mu \odot v) = \lambda \odot v^\mu = (v^\mu)^\lambda = v^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \odot v$.
- $1 \odot v = v^1 = v$.

Possiamo concludere che $(V, \oplus, \odot)$ è uno spazio vettoriale.

(c)

Siano $(a, b), (c, d), (e, f) \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$:

- $[(a, b) \oplus (c, d)] \oplus (e, f) = (a + c, \frac{bd}{2}) \oplus (e, f) = (a + c + e, \frac{bdf}{4}) = (a, b) \oplus (c + e, \frac{df}{2}) = (a, b) \oplus [(c, d) \oplus (e, f)]$.
- $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, \frac{bd}{2}) = (c + a, \frac{db}{2}) = (c, d) \oplus (a, b)$.

- Qual è il vettore nullo? $(a, b) \oplus (c, d) = (a, b)$ se e solo se $(a + c, \frac{bd}{2}) = (a, b)$, e questo avviene se e solo se $c = 0$ e $\frac{bd}{2} = b$, dunque il vettore nullo è $(0, 2)$.

- Chi è l'opposto di (a, b)? Vogliamo trovare un (c, d) tale che $(a, b) \oplus (c, d) = (0, 2)$, e questo accade se e solo se $a + c = 0$ e $\frac{bd}{2} = 2$; di conseguenza l'opposto di (a, b) è $(-a, \frac{4}{b})$.

- $\lambda \odot [(a, b) \oplus (c, d)] = \lambda \odot (a+c, \frac{bd}{2}) = (\lambda a + \lambda c, 2^{1-\lambda}(\frac{bd}{2})^\lambda)$; $[\lambda \odot (a, b)] \oplus [\lambda \odot (c, d)] = (\lambda a, 2^{1-\lambda} b^\lambda) \oplus (\lambda c, 2^{1-\lambda} c^\lambda) = (\lambda a + \lambda c, \frac{1}{2} 2^{2-2\lambda} (bd)^\lambda) = (\lambda a + \lambda c, 2^{1-\lambda}(\frac{bd}{2})^\lambda)$ usando le proprietà delle potenze.

- $(\lambda + \mu) \odot (a, b) = ((\lambda + \mu)a, 2^{1-\lambda-\mu} b^{\lambda+\mu})$; $[\lambda \odot (a, b)] \oplus [\mu \odot (a, b)] = (\lambda a, 2^{1-\lambda} b^\lambda) \oplus (\mu a, 2^{1-\mu} b^\mu) = ((\lambda + \mu)a, \frac{1}{2} 2^{2-\lambda-\mu} b^{\lambda+\mu}) = ((\lambda + \mu)a, 2^{1-\lambda-\mu} b^{\lambda+\mu})$ usando le proprietà delle potenze.

- $\lambda \odot (\mu \odot (a, b)) = \lambda \odot (\mu a, 2^{1-\mu} b^\mu) = (\lambda\mu a, 2^{1-\lambda}[2^{1-\mu} b^\mu]^\lambda) = (\lambda\mu a, 2^{1-\lambda\mu} b^{\lambda\mu}) = (\lambda\mu) \odot (a, b)$.

- $1 \odot (a, b) = (1 \cdot a, 2^{1-1} b^1) = (a, b)$.

Possiamo concludere che $(V, \oplus, \odot)$ è uno spazio vettoriale.

(d)

Osserviamo innanzitutto che V è un sottoinsieme dello spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in $\mathbf{R}$. Per due matrici $A, B \in V$, l'operazione di "somma" definita da $A \oplus B$ coincide con l'operazione naturale di somma $A + B$ di due matrici in $M_{n \times n}(\mathbf{R})$. Inoltre per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, l'operazione di "prodotto per scalari" definito da $\lambda \odot A$ coincide con il prodotto per scalari naturale definito in $M_{n \times n}(\mathbf{R})$.

Pertanto, controllare che $(V, \oplus, \odot)$ sia uno spazio vettoriale è equivalente a controllare che V sia un sottospazio vettoriale di $M_{n \times n}(\mathbf{R})$.

- La matrice nulla $0 \in M_{n \times n}(\mathbf{R})$ appartiene a V, in quanto è chiaramente simmetrica.

- La somma di due matrici simmetriche è simmetrica: siano $A = (a_{ij})_{i,j}$ e $B = (b_{ij})_{i,j}$ tali che $A = A^T$ e $B = B^T$. Allora le loro entrate soddisfano $a_{ij} = a_{ji}$ e $b_{ij} = b_{ji}$ per ogni $1 \leq i, j \leq n$. La generica entrata di posto (i, j) di $C = A + B$ è per definizione $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = c_{ji}$, pertanto $C^T = C$, ovvero $C \in V$.

- Siano $A = (a_{ij})_{i,j} \in V$ e $\lambda \in \mathbf{R}$. Sia $C = \lambda A$. Allora l'entrata di posto (i, j) di C è $c_{ij} = \lambda a_{ij} = \lambda a_{ji} = c_{ji}$. Dunque $C^T = C$, cioè $C \in V$.

Ne segue che $(V, \oplus, \odot)$ è un sottospazio vettoriale di $M_{n \times n}(\mathbf{R})$, in particolare è uno spazio vettoriale.