4. Didattica integrativa 2

(1) Sia $n \in \mathbf{N}$ un intero tale che $n \geq 2$. Sia $\mathcal{D}_n \subset M_{n\times n}(\mathbf{R})$ l'insieme delle matrici triangolari superiori, cioè l'insieme di tutte le matrici $A = (a_{i,j}) \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$, tali che $a_{i,j} = 0$ se $i > j$.
   (a) Si dimostri che $\mathcal{D}_n$ è un sottospazio vettoriale di $M_{n\times n}(\mathbf{R})$.
   (b) Si dimostri che il prodotto di due matrici in $\mathcal{D}_n$ è di nuovo in $\mathcal{D}_n$.
   (c) Si dimostri che un $A \in \mathcal{D}_n$ è invertibile se e solo se
   $$a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \neq 0$$
   (d) Si dimostri che se $A \in \mathcal{D}_n$ e A è invertibile, allora $A^{-1} \in \mathcal{D}_n$.

(2) Sia d un intero positivo. Sia $V = \mathbf{R}[x]_{\leq d}$. Si determini se $W \subset V$ è un sottospazio se
   (a) W consiste di tutti i polinomi $a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$ tali che ogni $a_i \in \mathbf{N}$.
   (b) $W = \{p \in V \mid p(1) = 0\}$.
   (c) W consiste di tutti i polinomi della forma $b_kx^{2k} + b_{k-1}x^{2k-2} + \cdots + b_1x^2 + b_0$, con $b_i \in \mathbf{R}$ per ogni i (dove $2k \leq d$).

(3) Sia $V = \mathbf{R}[x]_{\leq 2}$. Prendiamo $p_1 = x^2 + x + 1$, $p_2 = x^2 + x$, $p_3 = x + 1$.
   (a) Si dimostri che $\{p_1, p_2, p_3\}$ è una base di V.
   (b) Si scrivano i seguenti $q_i \in V$ come combinazione lineare di p_1, p_2, p_3
      (i) $q_1 = x$.
      (ii) $q_2 = x^2 + 3x + 1$.
      (iii) $q_3 = -2x^2 - 6x - 2$.
   (c) Si determini una base B di $\mathrm{span}(q_1, q_2, q_3)$ e si estenda B ad una base per V.

(4) Siano $a, b, c \in \mathbf{R}$. Si dimostri che i tre vettori
$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$$
sono una base di $\mathbf{R}^3$ se e solo se $a \neq b$, $a \neq c$ e $b \neq c$.