CAPITOLO 5

Funzioni lineari

1. Esempio

Consideriamo il vettore $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Questo oggetto può essere descritto in modo univoco tramite la sua lunghezza $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ e l'angolo φ tra il vettore e l'asse x. In questo modo possiamo scrivere il $(x, y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$.

Adesso consideriamo la rotazione R_θ di angolo θ. È chiaro che

$$R_\theta \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\varphi) \\ r\sin(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$$

Usando le formule standard (di prostaferesi) per cos e sin troviamo

$$\begin{pmatrix} r\cos(\theta+\varphi) \\ r\sin(\theta+\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)r\cos(\varphi) - \sin(\theta)r\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)r\cos(\varphi) + \cos(\theta)r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

In particolare

$$\begin{aligned} R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tramite le regole di calcolo per le matrici possiamo osservare che $R_\theta(v_1 + v_2) = R_\theta(v_1) + R_\theta(v_2)$ e $R_\theta(\lambda v) = \lambda R_\theta(v)$. Quindi R_θ è una funzione $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ che rispetta la struttura di spazio vettoriale. In questo capitolo studiamo funzioni che hanno questa properietà.

2. Definizione

Definizione 5.1. Siano V, W spazi vettoriali sul campo K. Diciamo che una funzione $f : V \to W$ è una *funzione lineare* se per ogni $v, v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in K$

(1) $f(v_1 +_V v_2) = f(v_1) +_W f(v_2)$
(2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Lemma 5.2. *Sia $f : V \to W$ una funzione lineare. Allora $f(\overrightarrow{0}_V) = (\overrightarrow{0}_W)$.*

Dimostrazione. Sia $v \in V$. Allora

$$f(\overrightarrow{0}_V) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot (f(v)) = \overrightarrow{0}_W$$

□

Lemma 5.3. *Sia $f : V \to W$ una funzione lineare. Allora $f(-v) = -f(v)$ e $f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2)$.*

Dimostrazione. Per la prima properietà:

$$f(-v) = f((-1) \cdot v) = (-1) \cdot f(v) = -f(v)$$

Per la seconda properietà

$$f(v_1 - v_2) = f(v_1) + f(-v_2) = f(v_1) - f(v_2)$$

□

ESEMPIO 5.4. Sia A una matrice $m \times n$, $V = K^n, W = K^m$. Allora $f : V \to W$ data da

$$f(v) := Av$$

è una funzione lineare. Infatti, per $v, v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in K$ abbiamo

$$f(v_1 + v_2) = A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = f(v_1) + f(v_2)$$

(dove la seconda uguaglianza è una delle regole di calcolo per le matrici) e

$$f(\lambda v) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda f(v)$$

ESEMPIO 5.5. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione lineare. Sia $c = f(1)$. Allora per $\lambda \in \mathbf{R}$ abbiamo

$$f(\lambda) = f(\lambda \cdot 1) = \lambda f(1) = c\lambda$$

Quindi f è determinata da $c = f(1)$.

ESEMPIO 5.6. Consideriamo $S : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la riflessione rispetto all'asse y. Allora $S(x, y) = (-x, y)$. Quindi

$$S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e S è lineare.

ESEMPIO 5.7. Consideriamo $P : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la proiezione sull'asse x. Allora $P(x, y) = (x, 0)$. Quindi

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ed P è lineare.

ESEMPIO 5.8. Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ allora la funzione $f(x, y) = (x^2, y)$ non è lineare. Abbiamo che $f(1, 0) = (1, 0)$, $f(2, 0) = (4, 0)$, $f(3, 0) = (9, 0)$. Quindi $(1, 0) + (2, 0) = (3, 0)$ ma $f(1, 0) + f(2, 0) = (5, 0) \neq (9, 0) = f(3, 0)$.

La funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definita da $f(x, y, z) = (x+2, y-1)$ non è lineare: una funzione lineare manda $\vec{0}$ a $\vec{0}$. Invece noi abbiamo che $f(0, 0, 0) = (2, -1) \neq (0, 0)$.

PROPOSIZIONE 5.9. *Sia $f : V \to W$ una funzione. Allora f è lineare se e solo se per ogni $v_1, v_2 \in V$ e $\lambda \in K$ vale $f(v_1 + \lambda v_2) = f(v_1) + \lambda f(v_2)$.*

DIMOSTRAZIONE. Se f è lineare, allora per ogni $v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in K$ abbiamo

$$f(v_1 + \lambda v_2) = f(v_1) + f(\lambda v_2) = f(v_1) + \lambda f(v_2).$$

Per l'altra direzione: se per ogni $v, w \in V$, $\lambda \in K$ vale $f(v+\lambda w) = f(v)+\lambda f(w)$, allora la prima condizione della definizione segue dal caso particolare $\lambda = 1$ e la seconda condizione dal caso particolare $v = \vec{0}$ ed il fatto che $f(\vec{0}) = \vec{0}$. □

ESEMPIO 5.10. Sia $f : \mathbf{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbf{R}^2$ data da $p(x) \mapsto (p(0), p(1))$. Allora f è lineare: Per ogni $c \in \mathbf{R}$, $p, q \in \mathbf{R}[x]_{\leq 3}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ abbiamo che

$$(p + \lambda q)(c) = p(c) + \lambda q(c)$$

Quindi

$$f(p + \lambda q) = ((p + \lambda q)(0), (p + \lambda q)(1)) = (p(0), p(1)) + \lambda(q(0), q(1)) = f(p) + \lambda f(q).$$

PROPOSIZIONE 5.11. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Sia W uno spazio vettoriale e $w_1, \ldots, w_n \in W$ un insieme di vettori. Allora:*

(1) Esiste una funzione lineare $f : V \to W$ tale che $f(v_i) = w_i$ per $i = 1, \ldots, n$.
(2) Questa funzione è unica.

Dimostrazione. Cominciamo col dimostrare l'unicità: sia $v \in V$. Allora $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ e

$$\begin{aligned} f(v) &= f(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) \\ &= a_1f(v_1) + \cdots + a_nf(v_n) \\ &= a_1w_1 + \cdots + a_nw_n \end{aligned}$$

Quindi $f(v)$ è determinata da $w_1, \ldots, w_n$ ed è unica se esiste.

Per l'esistenza: la funzione $f : V \to W$ che è definita da

$$f(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_1w_1 + \cdots + a_nw_n$$

è ben definita, perché si può scrive ogni $v \in V$ in modo univoco come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$. Ci resta solamente da mostrare che f è lineare. Prendiamo $v, v' \in V$, $\lambda \in K$ scriviamo

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_iv_i, v' = \sum_{i=1}^{n} b_iv_i.$$

Allora $v + \lambda v' = \sum_{i=1}^{n}(a_i + \lambda b_i)v_i$ e

$$\begin{aligned} f(v + \lambda v') &= f\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + \lambda b_i)v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(a_i + \lambda b_i)w_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_iw_i\right) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} b_iw_i\right) \\ &= f(v) + \lambda f(v') \end{aligned}$$

Quindi f è lineare. □

Esempio 5.12. Abbiamo visto che $\{(1,1),(1,-1)\}$ è una base di $\mathbf{R}^2$. La proposizione dice che esiste un'unica funzione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $f(1,1) = (2,0)$ e $f(1,-1) = (-2,0))$. Vogliamo adesso descrivere quella funzione.

Notiamo che $f(1,1) + f(1,-1) = (2,0) + (-2,0) = (0,0)$. Dalla linearità di f segue che $f(1,1) + f(1,-1) = f(2,0) = 2f(1,0)$. Quindi $f(1,0) = (0,0)$.

Similmente troviamo che $2f(0,1) = f(0,2) = f(1,1) - f(1,-1) = (2,0) - (-2,0) = (4,0)$. Quindi $f(0,1) = (2,0)$ e

$$f(x_1,x_2) = x_1f(1,0) + x_2f(0,1) = x_1(0,0) + x_2(2,0) = (2x_2,0)$$

Lemma 5.13. *Siano $f : V \to W$, $g : W \to U$ funzioni lineari allora $g \circ f : V \to U$ è una funzione lineare*

Dimostrazione. Per ogni $v_1, v_2 \in V$ e $\lambda \in K$ abbiamo che

$$\begin{aligned} (g \circ f)(v_1 + \lambda v_2) &= g(f(v_1 + \lambda v_2)) \\ &= g(f(v_1) + \lambda f(v_2)) \\ &= g(f(v_1)) + \lambda g(f(v_2)) \\ &= (g \circ f)(v_1) + \lambda(g \circ f)(v_2) \end{aligned}$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato che f è lineare, e nella terza uguaglianza che g è lineare. □

3. Nucleo e immagine

DEFINIZIONE 5.14. Sia $f : V \to W$ una funzione lineare. Allora *il nucleo* di f, denotato con $\ker(f)$, è definito da

$$\ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = \overrightarrow{0}\}$$

e l'immagine $\operatorname{im}(f)$ è definita da

$$\operatorname{im}(f) = \{w \in W \mid \text{esiste un } v \in V \text{ tale che } f(v) = w\}.$$

OSSERVAZIONE 5.15. Si nota che $\ker(f) \subset V$ e che $\operatorname{im}(f) \subset W$.

LEMMA 5.16. *Sia $f : V \to W$ una funzione lineare. Allora $\ker(f)$ è un sottospazio di V e $\operatorname{im}(f)$ è un sottospazio di W.*

DIMOSTRAZIONE. Se $v_1, v_2 \in \ker(f)$ e $\lambda \in K$. Allora

$$f(v_1 + \lambda v_2) = f(v_1) + \lambda f(v_2) = \overrightarrow{0} + \lambda \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

(dove la seconda uguaglianza viene da $v_1, v_2 \in \ker(f)$). Cioè $v_1 + \lambda v_2 \in \ker(f)$). Quindi $\ker(f)$ è un sottospazio.

Prendiamo $w_1, w_2 \in \operatorname{im}(f)$, $\lambda \in K$. Allora esistono $v_1, v_2 \in V$ tali che $f(v_1) = w_1$ e $f(v_2) = w_2$ e abbiamo

$$f(v_1 + \lambda v_2) = f(v_1) + \lambda f(v_2) = w_1 + \lambda w_2$$

Quindi $w_1 + \lambda w_2 \in \operatorname{im}(f)$ e $\operatorname{im}(f)$ è un sottospazio. □

Ricordiamo che una funzione $f : V \to W$ è iniettiva se per ogni $v_1, v_2 \in V$ con $v \neq w$ abbiamo che $f(v_1) \neq f(v_2)$.

LEMMA 5.17. *Una funzione lineare $f : V \to W$ è iniettiva se e solo se $\ker(f) = \{\overrightarrow{0}\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Da Lemma 5.2 segue che $f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$.

Se f è iniettiva e $v \neq \overrightarrow{0}$. Allora $f(v) \neq f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$. Quindi $v \notin \ker(f)$ e $\ker(f) \subset \{\overrightarrow{0}\}$. Inoltre, $\overrightarrow{0} \in \ker(f)$ e $\ker(f) = \{\overrightarrow{0}\}$.

Assumiamo adesso che $\ker(f) = \{\overrightarrow{0}\}$. Siano v_1, v_2 tali che $f(v_1) = f(v_2)$. Allora

$$\overrightarrow{0} = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2).$$

Quindi $(v_1 - v_2) \in \ker(f) = \{\overrightarrow{0}\}$. Allora $v_1 - v_2 = \overrightarrow{0}$ e $v_1 = v_2$. Quindi f è iniettiva. □

Ricordiamo che una funzione $f : V \to W$ è suriettiva se per ogni $w \in W$ esiste un $v \in V$ tale che $f(v) = w$, cioè $\operatorname{im}(f) = W$.

LEMMA 5.18. *Sia $f : V \to W$ una funzione lineare, tale che W è finitamente generato. Allora f è suriettiva se e solo se $\dim(\operatorname{im}(f)) = \dim W$*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo che f è suriettiva se e solo se $\operatorname{im}(f) = W$. Dal fatto che $\operatorname{im}(f)$ è un sottospazio di W segue dalla Proposizione 4.55 che $\operatorname{im}(f) = W$ se e solo $\dim(\operatorname{im}(f)) = \dim W$. □

LEMMA 5.19. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato, $\{v_1, \dots, v_r\}$ un sistema di generatori di V. Allora $\operatorname{span}(f(v_1), \dots, f(v_r)) = \operatorname{im}(f)$.*

DIMOSTRAZIONE. Da $f(v_1), \dots, f(v_r) \in \operatorname{im}(f)$ e il fatto che $\operatorname{im}(f)$ è un sottospazio segue che

$$\operatorname{span}(f(v_1), \dots, f(v_r)) \subset \operatorname{im}(f).$$

Per l'altra inclusione prendiamo $w \in \operatorname{im}(f)$ allora, per definizione, esiste un $v \in V$ tale che $f(v) = w$.

Possiamo adesso scrivere

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$$

e

$$\begin{aligned} w = f(v) &= f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r) \\ &= \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_r f(v_r) \in \operatorname{span}(f(v_1), \ldots, f(v_r)). \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE 5.20. Sia $f : V \to W$ una funzione lineare, con V finitamente generato. Per trovare una base di $\operatorname{im}(f)$ si può cominciare con una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V. Allora $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ generano $\operatorname{im}(f)$, quindi un sottoinsieme di $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ è una base. Per trovare quella base, si deve controllare se $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ siano o meno linearmente indipendenti. Qualsiasi combinazione lineare degli $f(v_i)$ che è uguale a $\overrightarrow{0}_W$ dà la possibilita di escludere un vettore del sistema di generatori.

ESEMPIO 5.21. Sia

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Il nucleo di f è formato dagli (x_1, x_2, x_3) tali che $x_1 - x_2 = 0, x_2 + x_3 = 0$. Quindi $\ker(f) = \{(t, t, -t) | t \in \mathbf{R}\} = \operatorname{span}((1, 1 - 1))$ e f non è iniettiva.

L'immagine di f è generata da $f(1,0,0), f(0,1,0)$ e $f(0,0,1)$. In particolare, $(1,0), (1,1), (0,-1)$ sono nell'immagine e quindi $\operatorname{im}(f) = \mathbf{R}^2$. In particolare f è suriettiva.

ESEMPIO 5.22. Sia $V = \mathbf{R}[x]_{\leq 3}$. Allora $D : V \to V$ tale che $D(p(x)) = p'(x)$ è una funzione lineare. Abbiamo $(p+q)'(x) = p'(x) + q'(x)$ e per $\lambda \in \mathbf{R}$ abbiamo $(\lambda p)'(x) = \lambda p'(x)$.

Il nucleo di D sono tutti i polinomi $p(x)$ tali che $p'(x)$ è il polinomio nullo. Gli unici polinomi con questa properietà sono i polinomi constanti, quindi $\ker(D) = \operatorname{span}(1)$ e f non è iniettiva. L'immagine è generata dalle immagini di $1, x, x^2, x^3$, che sono rispettivamente $0, 1, 2x, 3x^2$. Quindi $\operatorname{span}(0, 1, 2x, 3x^2) = \operatorname{im}(D)$. Allora $\operatorname{im}(D) = \mathbf{R}[x]_{\leq 2} \subset \mathbf{R}[x]_{\leq 3}$. Quindi $x^3 \notin \operatorname{im}(D)$ e D non è suriettiva.

TEOREMA 5.23 (Teorema del rango). *Sia V un spazio vettoriale finitamente generato, W uno spazio vettoriale ed $f : V \to W$ una funzione lineare. Allora*

$$\dim \ker(f) + \dim \operatorname{im}(f) = \dim V.$$

DIMOSTRAZIONE. Dal fatto che $\ker(f)$ è un sottospazio di V e V è finitamente generato segue che anche $\ker(f)$ è finitamente generato. Allora possiamo prendere una base finita $\{v_1, \ldots, v_r\}$ di $\ker(f)$. Possiamo quindi complementarla (Teorema 4.52) ad una base $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ di V.

Consideriamo ora $w_i = f(v_i)$ per $i = 1, \ldots, n$. Il lemma precedente implica che

$$\operatorname{span}(w_1, \ldots, w_n) = \operatorname{im}(f).$$

I vettori v_i per $i \leq r$ sono nel nucleo di f, quindi $w_i = \overrightarrow{0}$ per $i \leq r$ e

$$\operatorname{span}(w_{r+1}, \ldots, w_n) = \operatorname{span}(w_1, \ldots, w_n) = \operatorname{im}(f)$$

Dobbiamo quindi mostrare che $w_{r+1}, \ldots, w_n$ sono linearmente indipendenti.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} &= \lambda_{r+1} w_{r+1} + \cdots + \lambda_n w_n \\ &= \lambda_{r+1} f(v_{r+1}) + \cdots + \lambda_n f(v_n) \\ &= f(\lambda_{r+1} v_{r+1} + \cdots + \lambda_n v_n) \end{aligned}$$

In particolare, $\lambda_{r+1}v_{r+1} + \ldots \lambda_n v_n$ è in $\ker(f)$. I vettori $\{v_1, \ldots, v_r\}$ sono una base di $\ker(f)$. Quindi esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tali che

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = \lambda_{r+1}v_{r+1} + \cdots + \lambda_n v_n$$

e quindi

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r - \lambda_{r+1}v_{r+1} - \cdots - \lambda_n v_n = \overrightarrow{0}$$

Dal fatto che $v_1, \ldots, v_n$ sono una base di V e quindi linearmente indipendenti segue che $\lambda_i = 0$ per ogni i. In particolare $w_{r+1}, \ldots, w_n$ è una base di $\mathrm{im}(f)$.

Dal fatto che $v_1, \ldots, v_r$ è una base di $\ker(f)$ segue che $\dim\ker(f) = r$. Dal fatto che $w_{r+1}, \ldots, w_n$ è una base di $\mathrm{im}(f)$ segue che $\dim\mathrm{im}(f) = n - r$ e

$$\dim\ker(f) + \dim\mathrm{im}(f) = r + n - r = n = \dim V.$$

□

Corollario 5.24. *Siano V, W spazi vettoriali finitamente generati tali che $\dim V = \dim W$. Allora f è iniettiva se e solo se f è suriettiva se e solo se f è biettiva.*

Dimostrazione. Da $\dim V = \dim W$ abbiamo che

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim W$$

Quindi f è iniettiva se e solo se $\dim(\ker(f)) = 0$ se e solo se $\dim\mathrm{im}(f) = \dim W$ se e solo se f è suriettiva. □

Corollario 5.25. *Siano V, W spazi vettoriali tali che* $\dim V < \dim W$. *Allora f non è suriettiva.*

Dimostrazione. Da $\dim V < \dim W$ segue che V è finitamente generato. Quindi possiamo applicare il teorema del rango. Da

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim V$$

segue che $\dim\mathrm{im}(f) \leq \dim V < \dim W$. Quindi f non è suriettiva. □

Corollario 5.26. *Siano V, W spazi vettoriali finitamente generati tali che $\dim V > \dim W$. Allora f non è iniettiva.*

Dimostrazione. Da

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim V$$

segue che $\dim\ker(f) = \dim V - \dim\mathrm{im}(f) \geq \dim V - \dim W > 0$. Quindi f non è iniettiva. □

Definizione 5.27. Sia $f : V \to W$ una funzione lineare. Allora

(1) diciamo che f è un *isomorfismo* se esiste una funzione lineare $g : W \to V$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_V$ e $f \circ g = \mathrm{id}_W$.
(2) diciamo che f è un *endomorfismo* se $V = W$.
(3) diciamo che f è un *automorfismo* se f è un isomofismo e un endomorfismo.

Proposizione 5.28. *Sia $f : V \to W$ una funzione lineare. Allora f è un isomorfismo se e solo se f è biettiva.*

Dimostrazione. Assumiamo che f sia un isomorfismo. Sia $v \in \ker(f)$. Allora $f(v) = \overrightarrow{0}$ e quindi $g(f(v)) = g(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$. D'altra parte $g(f(v)) = \mathrm{id}_V(v) = v$. Allora $\ker(f) = \{\overrightarrow{0}\}$ e f è iniettiva.

Sia $w \in W$, e $v = g(w)$. Allora abbiamo $f(v) \in \mathrm{im}(f)$. Ma $f(v) = f(g(w)) = \mathrm{id}_W(w) = w$. Quindi $w \in \mathrm{im}(f)$ e $\mathrm{im}(f) = W$. Quindi f è iniettiva e suriettiva, cioè bietiva.

Per il viceversa, assumiamo che f sia biettiva. Allora per ogni $w \in W$ c'è un $v \in V$ tale che $w = f(v)$ (f è suriettiva) e il vettore w è unico. Allora possiamo definire $g(w) = v$ se e solo $f(v) = w$. È ovvio che $g(f(v)) = v$ e $f(g(w)) = w$. Ci resta da mostrare che g sia lineare.

Prendiamo $w_1, w_2 \in W$, $\lambda \in K$. Siano $v_1, v_2 \in V$ tali che $f(v_i) = w_i$ per $i = 1, 2$. Quindi $g(w_i) = v_i$. Per calcolare $g(w_1 + \lambda w_2)$ notiamo che $f(v_1 + \lambda v_2) = f(v_1) + \lambda f(v_2) = w_1 + \lambda w_2$. Allora

$$g(w_1 + \lambda w_2) = v_1 + \lambda v_2 = g(w_1) + \lambda g(w_2)$$

e g è lineare. □

Lemma 5.29. *Sia $f : V \to W$ una funzione lineare. Sia $v \in V$ e $w = f(v)$. Allora*

$$f^{-1}(w) = \{v\} + \ker(f)$$

Dimostrazione. Sia $v_1 \in f^{-1}(w)$. Allora $f(v_1) = w$ per definizione. Allora

$$f(v_1 - v) = f(v_1) - f(v) = w - w.$$

Quindi $v_1 - v = v_0 \in \ker(f)$ e $v_1 = v + v_0 \in \{v\} + \ker(f)$. Quindi $f^{-1}(w) \subset \{v\} + \ker(f)$.

Sia adesso $v_1 \in \{v\} + \ker(f)$. Allora esiste un $v_0 \in \ker(f)$ tale che $v_1 = v + v_0$. Adesso troviamo

$$f(v_1) = f(v + v_0) = f(v) + f(v_0) = f(v) + \overrightarrow{0} = f(v) = w.$$

Quindi $v_1 \in f^{-1}(w)$ e $\{v\} + \ker(f) \subset f^{-1}(w)$. □

Esempio 5.30. Consideriamo la funzione $D : \mathbf{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbf{R}[x]_{\leq 3}$ che manda $p(x)$ a $p'(x)$. Abbiamo visto nell'Esempio 5.22 che $\ker(D) = \operatorname{span}(1)$.

Consideriamo adesso $3x^2-6x$. Allora $D(x^3-3x^2) = 3x^2-6x$. Quindi $x^3-3x^2 \in D^{-1}(3x^2 - 6x)$ e

$$D^{-1}(3x^2 - 6x) = \{x^3 - 3x^2\} + \ker(D) = \{x^3 - 3x^2 + \lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

4. La matrice di una funzione lineare

Abbiamo visto nell'Esempio 5.4 che per ogni $A \in M_{m\times n}(K)$ la funzione $f(x) := Ax$ è una funzione lineare $K^n \to K^m$. L'idea adesso è di mostrare che per studiare le mappe lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita è sufficiente studiare le funzioni del tipo $f(x) := Ax$.

Cominciamo col mostrare che ogni spazio vettoriale di dimensione n è isomorfo a K^n. Sia V uno spazio vettoriale su K di dimensione n e sia $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base *ordinata* di V. (Per le properietà delle base che abbiamo studiato finora l'ordine dei vettori della base era irrilevante. In questa sezione invece l'ordine importa.) Ogni v si può scrivere in modo univoco come $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$. Diciamo che $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sono le *coordinate di v* rispetto a B.

Scrivere un vettore rispetto a B definisce una mappa da V a K^n:

$$\varphi_B : V \to K^n \text{ con } \varphi_B(v) = (a_1, \ldots, a_n)$$

se e solo se $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. A volte scriveremo $(a_1, \ldots, a_n)_B$ per ricordarci che le coordinate sono indotte dalla base B.

La mappa è chiaramente iniettiva e suriettiva.

Lemma 5.31. *La mappa $\varphi_B : V \to K^n$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Abbiamo già notato che la mappa è biettiva. Rimane da mostrare che sia anche una funzione lineare. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono le coordinate di v e $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ sono le coordinate di v', allora

$$v + v' = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)v_n.$$

Quindi $(\lambda_1 + \mu_1, \ldots, \lambda_n + \mu_n)$ sono le coordinate di $v + v'$ e

$$\varphi_B(v + v') = \varphi_B(v) + \varphi_B(v').$$

Similmente si trova che per ogni $\lambda \in K$ abbiamo che $\varphi_B(\lambda v) = \lambda\varphi_B(v)$. □

Esempio 5.32. Se $V = K^n$ e $\mathcal{E}$ è la base canonica allora

$$\varphi_{\mathcal{E}}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$$

Se $V = \mathbf{R}^2$ e $B = ((1, 1), (1, -1))$ allora

$$(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}(1, 1) + \frac{x_1 - x_2}{2}(1, -1).$$

quindi

$$\varphi_B(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

Se $V = \mathbf{R}[x]_{\leq 3}$ and $B = (1, x, x^2, x^3)$ allora

$$\varphi_B(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (a_0, a_1, a_2, a_3)$$

Quindi $\varphi_B(2x - 3x^3) = (0, 2, 0, -3)$.

Siano adesso V e W spazi vettoriali di dimensione finita, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ e $B' = (w_1, \ldots, w_m)$ basi di V e di W.

Dalla Proposizione 5.11 segue che per conoscere una funzione lineare $f : V \to W$ basta conoscere $f(v_j)$ per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ognuno degli $f(v_j)$ è in W. Quindi possiamo scrivere $f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}w_i$. Adesso la matrice $M_B^{B'}(f)$ di f rispetto alle basi B, B' è la matrice $m \times n$

$$(a_{i,j}).$$

Proposizione 5.33. *Siano V, W spazi vettoriali e siano B e B' basi ordinate per V, resp. W. Allora il procedimento che associa ad ogni funziona lineare f la sua matrice $M_B^{B'}(f)$ induce una corrispondenza biunivoca tra le funzioni lineari $V \to W$ e le matrici $m \times n$.*

Dimostrazione. Per ogni matrice $A \in M_{m\times n}(K)$ abbiamo fatto vedere in Proposizione 5.11 che esiste una funzione f tale che $f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}w_i$ e quindi soddisfa $M_B^{B'}(f) = A$. D'altra parte abbiamo anche visto in Proposizione 5.11 che le immagini $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ (e quindi la matrice $M_B^{B'}(f)$) determina f. Possiamo quindi affermare che c'è una corrispondenza biunivoca tra le funzioni lineari $V \to W$ e le matrici $m \times n$. □

Esempio 5.34. Consideriamo la riflessione rispetto alla retta $x_1 = x_2$ in $\mathbf{R}^2$. Questa mappa è definita da $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Consideriamo la base canonica di $\mathbf{R}^2$ per B e per B'. Allora $f(1, 0) = (0, 1) = 0 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (1, 0)$. Quindi $a_{11} = 0$ e $a_{21} = 1$. Similmente $f(0, 1) = (1, 0) = 1 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1)$. Qunidi $a_{21} = 1$ e $a_{22} = 0$.

$$M_B^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Prendiamo adesso $C = C' = ((1, 1), (1, -1))$. Allora il primo vettore della base è $(1, 1)$, la sua immagine è $(1, 1)$ e quindi $f(1, 1) = (1, 1) = 1 \cdot (1, 1) + 0 \cdot (1, -1)$. Il secondo vettore è $(1, -1)$. $f(1, -1) = (-1, 1) = 0 \cdot (1, 1) + (-1) \cdot (1, -1)$

$$M_C^{C'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO 5.35. Siano $V = K^n$, $W = K^m$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $f(v) = Av$. Sia B la base canonica per V, B' la base canonica per W. Allora $M_B^{B'}(f) = A$.

Consideriamo $e_j \in K$, allora $f(e_j)$ dà la j-esima colonna di $M_B^{B'}(f)$. Dalla formula per la moltiplicazione delle matrici segue che

$$f(e_j) = Ae_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} e_k$$

Quindi la colonna j di $M_B^{B'}(f)$ è la colonna j di A.

PROPOSIZIONE 5.36. *Sia $f : V \to W$ una funzione lineare. Siano $B = (v_1, \dots, v_n)$ e $B' = (w_1, \dots, w_m)$ basi per V e W. Allora*

$$\varphi_{B'}(f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n)) = M_B^{B'}(f) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

In altre parole, la funzione lineare $\varphi_{B'} \circ f \circ \varphi_B^{-1} : K^n \to K^m$ è la moltiplicazione con la matrice $M_B^{B'}(f)$.

DIMOSTRAZIONE. Questo è un calcolo diretto:

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_j \right) w_i \end{aligned}$$

Quindi l'i-esima entrata di $\varphi_{B'}(f(w))$ è

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_j$$

Usando la definizione di moltiplicazione con le matrici si trova che questa è anche l'i-esima entrata di $A \cdot (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$. $\square$

Quindi abbiamo un diagramma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_B"] & W \arrow[d, "\varphi_{B'}"] \\ K^n \arrow[r, "M_B^{B'}(f)\cdot"'] & K^m \end{tikzcd}$$

ESEMPIO 5.37. Sia $V = W = \mathbf{R}[x]_{\leq 3}$. Sia $f : V \to W$ la mappa che manda un polinomio $p(x)$ alla sua derivata $p'(x)$. Siano B e B' le basi canoniche $(1, x, x^2, x^3)$.

Allora $f(1) = 0; f(x) = 1; f(x^2) = 2x; f(x^3) = 3x^2$ e

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ESEMPIO 5.38. Sia $V = \mathbf{R}[x]_{\leq 3}$ e $W = \mathbf{R}^3$. Let $f : V \to W$ la mappa che manda un polinomio $p(x)$ a $(p(0), p(-1), p(1))$. Siano B la base canonica $(1, x, x^2, x^3)$ di V e B' la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Allora $f(1) = (1, 1, 1); f(x) = (0, -1, 1); f(x^2) = (0, 1, 1); f(x^3) = (0, -1, 1)$ e

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

PROPOSIZIONE 5.39. *Siano $f : V \to W$ e $g : W \to Z$ funzioni lineari. Siano B, B', B'' basi per V, W, Z. Allora*

$$M_B^{B''}(g \circ f) = M_{B'}^{B''}(g) M_B^{B'}(f)$$

PRIMA DIMOSTRAZIONE. Abbiamo che $\varphi_{B''} \circ (g \circ f) \circ \varphi_B^{-1}$ è la moltiplicazione con $M_B^{B''}(g \circ f)$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \varphi_{B''} \circ (g \circ f) \circ \varphi_B^{-1} &= \varphi_{B''} \circ g \circ \mathrm{id}_W \circ f \circ \varphi_B^{-1} \\ &= \varphi_{B''} \circ g \circ \varphi_{B'}^{-1} \circ \varphi_{B'} \circ f \circ \varphi_B^{-1} \\ &= (\varphi_{B''} \circ g \circ \varphi_{B'}^{-1}) \circ (\varphi_{B'} \circ f \circ \varphi_B^{-1}) \end{aligned}$$

L'ultima riga è semplicemente applicare prima la moltiplicazione con $M_B^{B'}(f)$ e dopo la moltiplicazione con $M_{B''}^{B'}(g)$. Quindi

$$M_{B''}^{B'}(g) M_B^{B'}(f) = M_B^{B''}(g \circ f)$$

□

SECONDA DIMOSTRAZIONE. Sia $B = (v_1, \dots, v_n)$, sia $B' = (w_1, \dots, w_p)$ e sia $B'' = (z_1, \dots, z_m)$.

Sia $M_B^{B'} = (a_{ij})$ e $M_{B'}^{B''} = (b_{ij})$. Allora $f(v_j) = \sum_{k=1}^p a_{kj} w_k$ e $g(w_k) = \sum_{i=1}^m b_{ik} z_i$. Quindi

$$\begin{aligned} g(f(v_j)) &= g\left(\sum_{k=1}^p a_{kj} w_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^p a_{kj} g(w_k) \\ &= \sum_{k=1}^p a_{kj} \left(\sum_{i=1}^m b_{ik} z_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^p b_{ik} a_{kj}\right) z_i \end{aligned}$$

Quindi al posto (i, j) della matrice troviamo il coefficiente di z_i in $f(v_j)$, quindi

$$\sum_{k=1}^p b_{ik} a_{kj}$$

Dalla definizione del prodotto di matrici segue che questo è anche l'entrata (i, j) di $M_{B'}^{B''}(g) M_B^{B'}(f)$. □

COROLLARIO 5.40. *Sia* $f : V \to W$ *un isomorfismo, allora*

$$M_{B'}^{B}(f^{-1}) = (M_{B}^{B'}(f))^{-1}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia f un isomorfismo e f^{-1} la sua inversa. Allora $f^{-1} \circ f : V \to V$ è la funzione id_V. Sia $B = (v_1, \ldots, v_n)$. Allora $\mathrm{id}_V(v_i) = v_i$ e quindi $M_B^B(\mathrm{id}_V) = I_n$. Similmente troviamo che $M_{B'}^{B'}(\mathrm{id}_W) = I_n$. La proposizione adesso implica che

$$M_{B'}^{B}(f^{-1})M_{B}^{B'}(f) = M_B^B(f^{-1} \circ f) = M_B^B(\mathrm{id}_V) = I_n$$

e

$$M_{B}^{B'}(f)M_{B'}^{B}(f^{-1}) = M_{B'}^{B'}(f \circ f^{-1}) = M_B^B(\mathrm{id}_W) = I_n$$

Quindi $M_{B'}^{B}(f^{-1}) = (M_{B}^{B'}(f))^{-1}$. □

ESEMPIO 5.41. Sia $R_{\pi/2} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la rotazione con angolo $\pi/2$, e sia $S : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la riflessione rispetto alla retta $x_1 = 0$. Allora le matrici corrispondenti sono

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice della composizione $S \circ R_{\pi/2}$ rispetto alla base canonica è:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO 5.42. Sia $R_\theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la rotazione con angolo θ. Allora la matrice rispetto alla base canonica è

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Usando la formule per l'inversa di una matrice 2×2 troviamo che la matrice inversa

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos -\theta & -\sin -\theta \\ \sin -\theta & \cos -\theta \end{pmatrix}$$

Quindi $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

5. Matrice del cambiamento di base

Adesso vogliamo studiare che cosa succede con la matrice di una funziona lineare quando cambiamo le basi. Da ora in poi denoteremo la base canonica di uno spazio vettoriale con $\mathcal{E}$.

Iniziamo col capire cosa succede per uno spazio fissato. Siano B_1, B_2 basi di uno spazio vettoriale finitamente generato V. Allora un qualsiasi vettore $v \in V$ può essere scritto rispetto ad entrambe le basi, diciamo $v = v_{B_1} = v_{B_2}$. Vogliamo studiare la matrice dell'applicazione lineare

$$\mathrm{id}_V : V \to V$$

la cui matrice associata $M_{B_1}^{B_2}(\mathrm{id}_V)$ soddisfa

$$M_{B_1}^{B_2}(\mathrm{id}_V)(\varphi_{B_1} v) = \varphi_{B_2} v.$$

Da un altro punto di vista, vogliamo studiare quanto la matrice di una funzione lineare dipenda dalla scelta di una base. Per esempio sia $f : V \to W$ una funzione lineare, B_1, B_2 basi (ordinate) di V e B' una base ordinata di W. Allora possiamo applicare la formula per la matrice di una composizione di funzioni $f \circ \mathrm{id}_V = f$ e troviamo

$$M_{B_1}^{B'}(f) = M_{B_1}^{B'}(f \circ \mathrm{id}_V) = M_{B_2}^{B'}(f)M_{B_1}^{B_2}(\mathrm{id}_V).$$

Troviamo un risultato analogo se cambiamo la seconda base. La matrice $M_{B_2}^{B_1}(\mathrm{id}_V)$ determina la dipendenza dalla scelta della base. Per questo motivo definiamo:

Definizione 5.43. Chiamiamo $M_{B_1}^{B_2}(\mathrm{id}_V)$ la *matrice di cambiamento di base* da B_1 a B_2 e la denotiamo con $T_{B_1}^{B_2}$.

Esempio 5.44. Sia $V = \mathbf{R}^2$ e siano $B = ((1,2),(1,1))$ e $B' = ((1,-1),(0,1))$. Vogliamo considerare la funzione lineare $\mathrm{id}_V : V_B \to V_{B'}$. Al solito dobbiamo controllare quali siano le immagini dei vettori della base del dominio, dove ricordiamo che le cooridnate dei vettori delle basi sono espressi rispetto alla base canonica degli spazi vettoriali.

Otteniamo quindi

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = 1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_{\mathcal{E}} + 3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}_{B'}.$$

Allo stesso modo

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = 1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_{\mathcal{E}} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_{B'}.$$

Ottenendo quindi la matrice

$$T_B^{B'} = \begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}$$

Proposizione 5.45. *Sia $f : V \to W$ una funzione lineare, siano B_1, B_2 basi ordinate di V e siano B_1', B_2' basi ordinate di W. Allora*

$$M_{B_2}^{B_2'}(f) = T_{B_1'}^{B_2'} M_{B_1}^{B_1'}(f) T_{B_2}^{B_1}$$

Dimostrazione. Possiamo riscrivere $f = \mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V$ e usando la formula nella Proposizione 5.39 troviamo

$$M_{B_2}^{B_2'}(f) = M_{B_2}^{B_2'}(\mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V) = M_{B_1'}^{B_2'}(\mathrm{id}_W) M_{B_1}^{B_1'}(f) M_{B_2}^{B_1}(\mathrm{id}_V) = T_{B_1'}^{B_2'} M_{B_1}^{B_1'}(f) T_{B_2}^{B_1}.$$

□

Dalla Proposizione 5.39 seguono inoltre i seguenti corollari.

Corollario 5.46. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano B, B' basi di V. Abbiamo che $T_B^{B'} = (T_{B'}^B)^{-1}$.*

Corollario 5.47. *Se $f : V \to V$ è un endomorfismo e B e B' sono basi di V. Allora*

$$M_{B'}^{B'}(f) = Q M_B^B(f) Q^{-1}$$

con $Q = T_B^{B'}$.

Inoltre si mostra facilmente il seguente.

Corollario 5.48. *Se $B = (v_1, \ldots, v_n)$ è una base di $\mathbf{R}^n$ ed $\mathcal{E}$ è la base canonica. Allora le colonne di $M_B^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^n})$ sono $v_1, \ldots, v_n$.*

Esempio 5.49. Ricordiamo che $\mathcal{E}_n$ è la base canonica di $\mathbf{R}^n$. Sia B la base $((1,1,1), (2,3,3), (3,4,5))$. Allora

$$T_B^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 4\\1 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

Per trovare $T_{\mathcal{E}}^B$ dobbiamo esprimere e_1, e_2, e_3 come combinazione lineare dei vettori di B. Denotiamo questi vettori con v_1, v_2, v_3. Allora

$$e_1 = 3v_1 - v_2;\ e_2 = -v_1 + 2v_2 - v_3;\ e_3 = -v_1 - v_2 + v_3$$

Quindi

$$T_{\mathcal{E}}^{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sia adesso $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ la moltiplicazione con

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Allora abbiamo visto che $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(f) = A$. Quindi

$$M_B^{\mathcal{E}_2}(f) = M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(f) T_B^{\mathcal{E}_3} = A T_B^{\mathcal{E}_3}$$

Se per $\mathbf{R}^2$ prendiamo la base $C = ((2,3),(1,2))$ allora troviamo che

$$T_C^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } T_{\mathcal{E}_2}^C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Quindi un calcolo standard adesso mostra che

$$M_B^C(f) = T_{\mathcal{E}_2}^C A T_B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Teorema 5.50. *Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita. Sia $f : V \to W$ una funzione lineare. Allora esistono basi $(v_1, \ldots, v_n)$ di V e $(w_1, \ldots, w_n)$ di W tali che*

$$M_B^{B'}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Sia r la dimensione dell'immagine di f, allora $\dim \ker(f) = n - r$. Prendiamo adesso una base $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ per $\ker(f)$. Tale base può essere estesa ad una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V. Prendiamo $w_i = f(v_i)$ per $i = 1 \ldots, r$.

Allora sappiamo che $\mathrm{im}(f)$ è generata da $f(v_1), \ldots, f(v_n)$. Dal fatto che $f(v_i) = \overrightarrow{0}$ per $i > r$ segue che $\mathrm{im}(f)$ è già generata da $f(v_1), \ldots, f(v_r)$, quindi da $w_1, \ldots, w_r$. Dal fatto che $\dim \mathrm{im}(f) = r$ segue che questi vettori costituiscono una base e sono quindi linearmente indipendenti. Adesso possiamo estendere $\{w_1, \ldots, w_r\}$ ad una base $\{w_1, \ldots, w_m\}$ di W.

Per trovare adesso la matrice $M_B^{B'}(f)$ si nota che per $i \leq r$ abbiamo $f(v_i) = w_i$. Quindi $[f(v_i)]_{B'} = e_i$ per $i = 1, \ldots, r$. Per $i > r$ abbiamo $f(v_i) = \overrightarrow{0}$. Quindi $[f(v_i)]_{B'} = 0$. Allora le prime r colonne sono zero, con l'eccezione della posizione (i,i) dove c'è un 1 e le altre colonne contengono soltanto 0. □

Definizione 5.51. Siano A, B due matrici $n \times n$. Diciamo che A e B sono simili se esiste una matrice Q, invertibile, tale che

$$A = Q^{-1} B Q$$

Osservazione 5.52. Due matrici A e B sono simili se e solo se esiste un endomorfismo $f : K^n \to K^n$ e basi C, C' tali che $A = M_C^C(f)$ e $B = M_{C'}^{C'}(f)$. (Quindi se e solo se sono matrici di un endomorfismo rispetto a basi diverse.)

6. Applicazioni ai sistemi di equazioni lineari

Sia A una matrice $m \times n$. Allora abbiamo visto che

$$f(x) = Ax$$

definisce una funzione lineare $K^n \to K^m$.

Lemma 5.53. *Abbiamo che* $\mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0}) = \ker(f)$.

Dimostrazione. $x \in \mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0})$ se e solo se $Ax = \overrightarrow{0}$ se e solo se $f(x) = \overrightarrow{0}$ se e solo se $x \in \ker(f)$. □

Lemma 5.54. *Sia $b \in K^m$. Allora $\mathrm{Sol}(A, b) = \emptyset$ oppure per ogni $x \in \mathrm{Sol}(A, b)$ abbiamo che*

$$\mathrm{Sol}(A, b) = \{x\} + \mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0})$$

Dimostrazione. Abbiamo che per $x \in \mathrm{Sol}(A, b)$ vale

$$\mathrm{Sol}(A, b) = f^{-1}(b) = \{x\} + \ker(f) = \{x\} + \mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0}).$$

□

Osservazione 5.55. Se $b \neq \overrightarrow{0}$ allora una soluzione x_I di $Ax = b$ si chiama una soluzione del sistema *inomogeneo*. Questo risultato dice che per trovare tutte le soluzioni di un sistema inomogeneo è sufficiente determinare una soluzione e sommare a questa soluzione tutte le soluzioni del sistema *omogeneo* (il sistema con $b = \overrightarrow{0}$). Questa osservazione è molto utile nel caso in cui si debbano risolvere vari sistemi associati alla stessa matrice A, ma con diversi valori per b, e si possa trovare facilmente una soluzione per il sistema $Ax = \overrightarrow{0}$.

Lemma 5.56. *Se $\mathrm{Sol}(A, b) \neq \emptyset$ allora ci sono $n - \mathrm{rg}(A)$ incognite libere e $\mathrm{rg}(A)$ incognite determinate.*

Dimostrazione. Il rango di A è uguale al numero di pivot nella forma a scala di A (vedi Proposizione 4.61). Quindi il numero di incognite determinate (che è il numero di pivot) è uguale a $\mathrm{rg}(A)$. Le incognite libere sono le altre e quindi ci sono $n - \mathrm{rg}(A)$ incognite libere. □

Teorema 5.57 (Teorema di Rouché-Capelli). *L'insieme Sol$(A, b) \neq \emptyset$ se e solo se*

$$\mathrm{rg}(A|b) = \mathrm{rg}(A).$$

Dimostrazione. Abbiamo che $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Sol}(A, b)$ se e solo se $Ax = b$. Possiamo adesso riscrivere questa condizione nella seguente formulazione

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Quindi $Ax = b$ ha una soluzione se e solo se b è una combinazione lineare delle colonne di A. Quest'ultima condizione è equivalente al fatto che b sia nel spazio delle colonne di A, che è equivalente a $\mathrm{rg}(A|b) = \mathrm{rg}(A)$. □

Proposizione 5.58. *Sia $A \in M_{m\times n}(K)$. Allora*

(1) $Ax = b$ ha soluzioni per ogni $b \in K^m$ se e solo se $\mathrm{rg}(A) = m$.
(2) $Ax = \overrightarrow{0}$ ha un'unica soluzione se e solo se $\mathrm{rg}(A) = n$.

Dimostrazione. Per la prima condizione abbiamo che $Ax = b$ ha una soluzione per ogni $b \in K^m$ se e solo se ogni b è contenuto nello spazio delle colonne di A. Quindi se e solo se lo spazio delle colonne di A è K^m, che ha dimensione m.

Il sistema $Ax = \overrightarrow{0}$ ha sempre la soluzione $\overrightarrow{0}$. Questa è l'unica soluzione se e solo se non ci sono incognite libere. Il numero di tali incognite è $n - \mathrm{rg}(A)$ e quindi questo succede se e solo se $n = \mathrm{rg}(A)$. □

Esempio 5.59. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 5 & -10 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
Si controlla facilmente che le tre righe sono linearmente dipendenti. Infatti, la forma a scala ha due pivot, e quindi $\mathrm{rg}(A) = 2$. Allora $\dim \mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0}) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 1$. Dal fatto che $(2, 1, 0) \in \mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0})$ segue adesso che $\mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0}) = \mathrm{span}((2, 1, 0))$.

Se prendiamo adesso $b = (-2, -2, 0)$. Allora $(1, 1, 1) \in \mathrm{Sol}(A, b)$ e quinidi
$$\mathrm{Sol}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + \mathrm{span} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1+t \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbf{R} \right\}$$

7. Determinare nucleo e immagine

Siano V, W spazi vettoriali finitamente generati, $f : V \to W$ una funzione lineare. Siano $B = (v_1, \ldots, v_n)$ e $B' = (w_1, \ldots, w_m)$ basi ordinate di V e di W. Sia $M_B^{B'}(f)$ la matrice di f rispetto a B e B'.

Sia $g : K^n \to K^m$ la moltiplicazione con $M_B^{B'}(f)$.

Proposizione 5.60. *Abbiamo che φ_B manda $\ker(f)$ a $\ker(g)$ e che $\varphi_{B'}$ manda $\mathrm{im}(f)$ a $\mathrm{im}(g)$.*

Dimostrazione. Sia $v \in \ker(f)$ allora $f(v) = \overrightarrow{0}$ e quindi $\varphi_{B'}(f(v)) = \overrightarrow{0}$. Abiamo visto che $\varphi_{B'} \circ f = g \circ \varphi_B$. Quindi $g(\varphi_B(v)) = \overrightarrow{0}$ e $\varphi(v) \in \ker(g)$.

Se $x \in \ker(g)$ allora $g(x) = \overrightarrow{0}$. Da $g = \varphi_{B'} \circ f \circ \varphi_B^{-1}$ segue che $\varphi_B^{-1}(x) \in \ker \varphi_{B'} \circ f$. La funzione $\varphi_{B'}$ è un isomorfismo, quindi è iniettiva e $\ker \varphi_{B'} \circ g = \ker g$. Quindi φ_B induce la correspondenza tra $\ker(f)$ e $\ker(g)$.

Similmente troviamo
$$\varphi_{B'}(\mathrm{im}(f)) = \mathrm{im}(\varphi_{B'} \circ f) = \mathrm{im}(g \circ \varphi_B) \subset \mathrm{im}(g)$$
e
$$\varphi_{B'}^{-1}(\mathrm{im}(g)) = \mathrm{im}(\varphi_{B'}^{-1} \circ g) = \mathrm{im}(f \circ \varphi_B^{-1}) \subset \mathrm{im}(f)$$
□

Teorema 5.61. *Siano V, W spazi vettoriali finitamente generati, $f : V \to W$ una funzione lineare. Siano $B = (v_1, \ldots, v_n)$ e $B' = (w_1, \ldots, w_m)$ basi ordinate di V e di W. Sia $A = M_B^{B'}(f)$ la matrice di f rispetto a B e B'. Allora*
$$\dim \mathrm{im}(f) = \mathrm{rg}(A) \text{ e } \dim \ker(f) = \dim \mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0})$$

Dimostrazione. Possiamo restringere l'isomorfismo $\varphi_{B'} : W \to K^m$ a $\mathrm{im}(f)$. Dal fatto che $\varphi_{B'}$ è lineare e $\mathrm{im}(f)$ è un sottospazio segue che $\varphi|_{\mathrm{im}(f)} : \mathrm{im}(f) \to K^m$ è una funzione lineare. La restrizione di una funziona iniettiva rimane iniettiva quindi $\varphi|_{\mathrm{im}(f)}$ è iniettiva.

Dalla discussione di sopra segue che $\varphi(\mathrm{im}(f)) = \mathrm{im}(g)$. Quindi troviamo una funzione lineare e biettiva $\varphi_B|_{\mathrm{im}(f)} : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{im}(g)$. Dai Corollari 5.26 e 5.25 segue che un isomorfismo manda una spazio vettoriale in uno spazio della stessa dimensione quindi $\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(\mathrm{im}(g))$.

Similmente si trova che $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(g))$.

La mappa g è la moltiplicazione con una martrice A. Lo spazio vettoriale $\mathrm{im}(f)$ è generato da $Av_1, \ldots, Av_n$ dove $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di K^n. Se prendiamo la base canonica $\{e_1, \ldots, e_n\}$, allora Ae_i è la i-esima colonna di A. Quindi $\mathrm{im}(g)$ è generato dalle colonne di A. Quindi $\mathrm{im}(g)$ è lo spazio delle colonne di A, che ha dimensione $\mathrm{rg}(A)$.

Abbiamo già visto che $\ker(g) = \mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0})$. Quindi

$$\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(g)) = \mathrm{rg}(A).$$

$\square$

ESEMPIO 5.62. Sia $f : \mathbf{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare che manda $p(x)$ a $(p(0), p(-1), p(1))$. Abbiamo visto che la matrice di f rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Una forma a scala di questa matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\varphi_B(\ker(f))$ è data da $\{(0, t, 0, -t) \mid t \in \mathbf{R}\}$. Quindi $\ker(f)$ è generato da

$$\varphi_B^{-1}(0, 1, 0, -1) = x - x^3$$

8. La matrice inversa

Nel Capitolo 2 abbiamo visto che una matrice $n \times n$ ha una matrice inversa se la forma a scala di A non contiene una riga con solo zeri. Quest'ultima affermazione è equivalente a dire che il rango di A è il numero delle righe di A che è n. Quindi se $\mathrm{rg}(A) = n$ allora A è invertibile.

Adesso mostriamo che se il $\mathrm{rg}(A) < n$ allora A non è una matrice invertibile.

DEFINIZIONE 5.63. Sia A una matrice $m \times n$. Diciamo che $B \in M_{n \times m}(K)$ è *un'inversa sinistra* di A se $BA = I_n$. Diciamo che $B \in M_{n \times m}(K)$ è *un'inversa destra* di A se $AB = I_m$.

OSSERVAZIONE 5.64. La matrice inversa di una matrice $A \in M_{n \times n}(K)$ del Capitolo 2 è una matrice che è contemporaneamente un'inversa destra e un'inversa sinistra.

LEMMA 5.65. *Se la matrice A ha un'inversa destra allora* $\mathrm{rg}(A) = m$. *Se la matrice A ha un'inversa sinistra allora* $\mathrm{rg}(A) = n$.

DIMOSTRAZIONE. Se A ha un'inversa destra, allora per ogni $v \in K^m$ troviamo $v = I_m v = (AB)v = A(Bv)$. Quindi v è nell'immagine della moltiplicazione con A. Quinda la moltiplicazione con A è suriettiva e il rango di A è m.

Se A ha un'inversa sinistra, allora per ogni $v \in K^n$ vale che $BAv = I_n v = v$. Quindi $BAv \neq 0$ per ogni $v \in K^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. Quindi $Av \neq \overrightarrow{0}$ per ogni v. Quindi la moltiplicazione con A è una mappa iniettiva e troviamo con la formula del rango (Teorema 5.23) che $\mathrm{rg}(A) = n$. $\square$

[Il lemma segue anche dal Teorema 5.50]

LEMMA 5.66. *Se il rango di A è m allora A ha un'inversa destra. Se il rango di A è n allora A ha un'inversa sinistra.*

DIMOSTRAZIONE. Assumiamo prima che $\mathrm{rg}(A) = m$ e consideriamo la mappa $f : K^n \to K^m$ definita da $f(x) = Ax$. Dal fatto che il rango di A è m segue che f è suriettiva. Quindi esistono $v_1, \ldots, v_m \in K^n$ tali che $f(v_i) = e_i$. Da 5.11 segue che esiste una funzione lineare $g : K^m \to K^n$ tale che $g(e_i) = v_i$. Quindi $f(g(e_i)) = e_i$ per ogni i e

$$I_m = M_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{E}_m}(f \circ g) = M_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{E}_n}(f) M_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{E}_n}(g) = A M_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{E}_n}(g).$$

(Dove $\mathcal{E}_m$ è la base canonica di K^m e $\mathcal{E}_n$ la base canonica di K^n.) Quindi $M^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(g)$ è la matrice inversa a destra.

Adesso assumiamo che $\mathrm{rg}(A) = n$ e consideriamo la mappa $f : K^n \to K^m$ definita da $f(x) = Ax$. L'immagine di f è generata da $w_1 := f(e_1), \dots, w_n := f(e_n)$. Dal fatto che la dimensione dell'immagine è n segue che $w_1, \dots, w_n$ è una base dell'immagine. Dal fatto che i w_i sono linearmente indipendenti segue che esiste una funzione lineare $g : K^m \to K^n$ tale che $g(w_i) = e_i$. Quindi $(g \circ f)(e_i) = g(f(e_i)) = g(w_i) = e_i$ per $i = 1, \dots, n$ e $g \circ f = \mathrm{id}$. Siano $\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m$ le basi canoniche per K^n e K^m allora

$$I_n = M^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_n}(\mathrm{id}) = M^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_n}(g \circ f) = M^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(g) M^{\mathcal{E}_m}_{\mathcal{E}_n}(f) = M^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(g) A.$$

Quindi A ha un'inversa sinistra. $\square$

Proposizione 5.67. *Una matrice $n \times n$ è invertibile se e solo se* $\mathrm{rg}(A) = n$. *Quindi A è invertibile se e solo se I_n è una forma a scala di A.*

Dimostrazione. Se A è invertibile allora A ha una matrice inversa a destra e una matrice inversa a sinistra, quindi il rango di A è n. Se il rango di A è n, allora la forma a scala ha n pivots (Proposizione 4.61) e quindi non ha una riga con solo zeri. Abbiamo visto nella Proposizione 2 che in questo caso A è invertibile. $\square$

Per le matrici quadrate abbiamo un risultato più forte:

Proposizione 5.68. *Sia A una matrice $n \times n$. Allora B è un'inversa a destra se e solo se B è un'inversa a sinistra se e solo se B è la matrice inversa di A.*

Dimostrazione. Se B è un'inversa sinistra allora il rango di A è n. Quindi esiste anche un'inversa a destra C e troviamo

$$B = BI_n = BAC = I_n C = C$$

quindi $B = C$ è un'inversa a destra. In modo simile si mostra che ogni inversa destra è un'inversa sinistra.

Quindi ogni inversa destra è la matrice inversa di A ed ogni inversa sinistra è la matrice inversa di A. $\square$