Supporto alla didattica 2 - 26-30/10/2020 - Soluzioni

Esercizio 1

(a) Dobbiamo verificare che $\mathcal{D}_n$ soddisfi le tre proprietà della Definizione 4.13 nelle note del corso, ovvero che sia non vuoto, chiuso per somme e chiuso per moltiplicazione per scalari.

1. La matrice nulla appartiene a $\mathcal{D}_n$, poiché tutte le sue entrate sono uguali a 0. Quindi $\mathcal{D}_n$ è non vuoto.

2. Date $A = (a_{ij}) \in \mathcal{D}_n$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{D}_n$, vogliamo dimostrare che la matrice $A + B$ è ancora un elemento di $\mathcal{D}_n$. Quindi dobbiamo verificare che $(A + B)_{ij} = 0$ per ogni $i > j$. Ma se $i > j$ allora abbiamo che $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = 0$, poiché $a_{ij} = 0 = b_{ij}$. Quindi $A + B \in \mathcal{D}_n$.

3. Data $A = (a_{ij}) \in \mathcal{D}_n$, vogliamo dimostrare che per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ la matrice λA è ancora un elemento di $\mathcal{D}_n$. Se $i > j$, allora $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij} = 0$ poiché $a_{ij} = 0$. Quindi $\lambda A \in \mathcal{D}_n$.

(b) Date $A = (a_{ij}) \in \mathcal{D}_n$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{D}_n$, vogliamo dimostrare che la matrice AB è ancora un elemento di $\mathcal{D}_n$. Prendiamo due interi $i > j$: per definizione di prodotto tra matrici abbiamo che

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Se $1 \leq k \leq i - 1$ allora $i > k$, quindi $a_{ik} = 0$ e il primo termine dell'ultima somma è uguale a zero. Se invece $i \leq k \leq n$ allora $k \geq i > j$, quindi $b_{kj} = 0$ e abbiamo che anche il secondo addendo della somma precedente è nullo. In conclusione, $(AB)_{ij} = 0$ per ogni $i > j$, quindi $AB \in \mathcal{D}_n$.

(c) Procediamo per induzione su n. Se $n = 2$, allora A è nella forma $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$. Se $a_{11}a_{22} \neq 0$, allora a_{11} e a_{22} sono entrambi non nulli. In questo caso abbiamo che

$$E_3E_2E_1A = I_2,$$

dove $E_1 = S(1, 2; -\frac{a_{12}}{a_{22}})$, $E_2 = M(1; \frac{1}{a_{11}})$, $E_3 = M(2; \frac{1}{a_{22}})$. Quindi la matrice identità è una forma a scala di A, e ciò implica che A è invertibile.

Viceversa, vogliamo mostrare che se A è invertibile allora $a_{11}a_{22} \neq 0$. Supponiamo per assurdo che $a_{11}a_{22} = 0$. Allora almeno uno tra a_{11} e a_{22} deve essere nullo, ma in questo caso A avrà o una riga o una colonna nulla. Quindi A non può essere invertibile, assurdo.

Ora dobbiamo dimostrare il passo induttivo. Supponiamo che $n > 2$ e che la tesi sia vera per $n - 1$, ovvero che per ogni matrice $X = (x_{ij}) \in \mathcal{D}_{n-1}$

$$X \text{ è invertibile} \quad \Leftrightarrow \quad x_{11} \cdots x_{n-1,n-1} \neq 0.$$

Vogliamo far vedere che la tesi è vera anche per n. Sia $A \in \mathcal{D}_n$ e consideriamo l'elemento a_{nn}: possono verificari i seguenti due casi.

Caso 1: $a_{nn} = 0$. In questo caso $a_{11} \cdots a_{nn} = 0$ e A non è invertibile, quindi la tesi è verificata.

Caso 2: $a_{nn} \neq 0$. Per ogni $i = 1, \ldots, n-1$, utilizzando il fatto che $a_{nn} \neq 0$, possiamo sottrarre un opportuno multiplo dell'n-esima riga di A alla riga i-esima in modo da cancellare il termine più a destra di quest'ultima. In questo modo otteniamo una matrice A' della seguente forma:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & B & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{array} \right),$$

Dove B è una matrice $(n-1) \times (n-1)$ con $a_{11}, \ldots, a_{n-1,n-1}$ sulla diagonale. Poiché A' è ottenuta da A applicando operazioni elementari, l'invertibilità di A è equivalente all'invertibilità di A'. Inoltre si vede facilmente che quest'ultima è equivalente all'invertibilità di B, dato che $a_{nn} \neq 0$. Chiaramente $B \in \mathcal{D}_{n-1}$, quindi abbiamo che

$$B \text{ è invertibile} \quad \Leftrightarrow \quad a_{11} \cdots a_{n-1,n-1} \neq 0 \quad \Leftrightarrow a_{11} \cdots a_{nn} \neq 0 :$$

la prima equivalenza segue dall'ipotesi induttiva, dato che $B \in \mathcal{D}_{n-1}$, mentre la seconda vale perché $a_{nn} \neq 0$. Quindi, per quanto osservato sopra, abbiamo che A è invertibile se e solo se $a_{11} \cdots a_{nn} \neq 0$.

(d) Se A è invertibile possiamo applicare l'algoritmo di Gauss per trovare l'inversa applicando delle operazioni elementari sulle righe. In altre parole, esistono matrici elementari $E_1, \ldots, E_t$ tali che $E_t \cdots E_1 A = I_n$ e $A^{-1} = E_t \cdots E_1$. Poiché A è triangolare superiore, possiamo notare che nell'algoritmo è sufficiente utilizzare esclusivamente operazioni che sommano a una riga un multiplo di una riga di indice maggiore, o che moltiplicano una riga per uno scalare. Quindi possiamo assumere che le matrici E_k siano nella forma $S(i,j;\lambda)$ con $i < j$, oppure $M(i;\lambda)$. Entrambe queste matrici sono triangolari superiori, quindi $A^{-1} = E_t \cdots E_1$ è il prodotto di matrici in $\mathcal{D}_n$. Per il punto (b) abbiamo che $\mathcal{D}_n$ è chiuso per prodotti, perciò $A^{-1} \in \mathcal{D}_n$.

Esercizio 2

(a)

$W = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d \mid a_i \in \mathbf{N}\}$ non è un sottospazio vettoriale di V perché non è chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalari. Infatti, siano $p \in W, \lambda \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, allora $p = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$ per opportuni coefficienti $a_i \in \mathbf{N}$, ma il polinomio λp ha per coefficienti $\lambda a_i \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $i = 1, \ldots, d$, ovvero $\lambda p \notin W$.

(b)

$W = \{p \in V \mid p(1) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V. Lo verifichiamo con la definizione.

- $0 \in W$: il polinomio costantemente nullo (che è il vettore nullo di V) in particolare appartiente all'insieme definito da W.

- Siano $p = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d, q = b_0 + b_1x + \cdots + a_dx^d \in W$, con $a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, d$. Dobbiamo verificare che la loro somma $p + q \in W$. Per definizione di W, $p(1) = 0$, da cui ricaviamo che la somma dei coefficienti $a_0 + a_1 + \cdots + a_d = 0$. Analogamente $q(1) = 0$ significa che $b_0 + b_1 + \cdots + b_d = 0$. Ora $p + q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_d + b_d)x^d$ e $(p+q)(1) = a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + \cdots + a_d + b_d$. Riordinando gli addendi e utilizzando le relazioni sulle somme dei coefficienti di p e q si ottiene $(p + q)(1) = 0$ ovvero $p + q \in W$.

- Sia $p = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d \in W$, con $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, d$ e sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Come al punto precedente ricaviamo che $a_0 + a_1 + \cdots + a_d = 0$. Dobbiamo verificare che $\lambda p = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \cdots + \lambda a_d x^d \in W$. Calcoliamo $\lambda p(1) = \lambda a_0 + \lambda a_1 + \cdots + \lambda a_d = \lambda(a_0 + \cdots + a_d) = \lambda \cdot 0 = 0$. Pertanto, $\lambda p \in W$.

(c)

Sia $k \in \mathbf{N}$ tale che $2k \leq d$ fissato. $W = \{b_kx^{2k} + b_{k-1}x^{2k-2} + \cdots + b_1x^2 + b_0 \mid b_i \in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di V (si tratta dei polinomi pari a coefficienti reali di grado al più $2k$). Verifichiamolo con la definizione:

- $0 \in W$: il polinomio costantemente nullo si ottiene scegliendo come coefficienti $b_k = b_{k-1} = \cdots = b_1 = b_0 = 0$.

- Siano $p = \sum_{i=0}^{k} b_ix^{2i}$ e $q = \sum_{i=0}^{k} c_ix^{2i}$ polinomi di W, con $b_i, c_i \in \mathbf{R}$. Allora la somma $p + q = \sum_{i=0}^{k} b_ix^{2i} + \sum_{i=0}^{k} c_ix^{2i} = \sum_{i=0}^{k}(b_i + c_i)x^{2i}$ è ancora un polinomio di W.

- Sia $p = \sum_{i=0}^{k} b_ix^{2i}$ un polinomio in W e sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora $\lambda p = \lambda \sum_{i=0}^{k} b_ix^{2i} = \sum_{i=0}^{k} \lambda b_ix^{2i} \in W$, perché i coefficienti $\lambda b_i \in \mathbf{R}$.

Esercizio 3

(a)

Sia $P := \{p_1, p_2, p_3\}$; per dimostrare che P è una base di V dobbiamo dimostrare che è un sistema di generatori di V linearmente indipendente, ovvero che

- $\mathrm{span}(P) = V$, cioè ogni polinomio $ax^2 + bx + c \in V$ può essere scritto come $\sum_{i=1}^{3} \lambda_ip_i$ per opportuni $\lambda_i \in \mathbf{R}$.

- Se $\sum_{i=1}^{3} \lambda_ip_i = 0$ allora $\lambda_i = 0$ per ogni $i = 1, 2, 3$.

Partiamo dal primo punto. Abbiamo

$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow \lambda_1(x^2+x+1) + \lambda_2(x^2+x) + \lambda_3(x+1) = ax^2+bx+c \Leftrightarrow$
$(\lambda_1+\lambda_2)x^2 + (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x + (\lambda_1+\lambda_3) = ax^2+bx+c$

dunque possiamo scrivere $\sum_{i=1}^3 \lambda_i p_i = ax^2+bx+c$ se e solo se il sistema $A\underline{v} = \underline{b}$ ha soluzione, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Effettuando operazioni elementari di riga su A, otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Visto che la matrice identità è una forma a scala di A, deduciamo che A è invertibile; questo significa che il sistema $A\underline{v} = \underline{b}$ ha un'unica soluzione quale che sia $\underline{b}$, ovvero $\underline{v} := A^{-1}\underline{b}$.

Questo ci dice non solo che P è un sistema di generatori, ma anche che è linearmente indipendente: infatti, per quanto appena visto, l'unica soluzione di $\sum_{i=1}^3 \lambda_i p_i = 0$ è data da $\underline{v} = A^{-1}\underline{0} = \underline{0}$.

(b)

Scriviamo $q_i = a_i x^2 + b_i x + c_i$; dobbiamo, per ogni i, trovare la soluzione del sistema $A\underline{v} = \underline{b^i}$, dove A è la matrice introdotta nel punto precedente, $\underline{v_i} = (\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \lambda_{3i})^T$ e $\underline{b^i} = (a_i, b_i, c_i)^T$.

Applichiamo quindi la riduzione a scala a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_i \\ 1 & 1 & 1 & b_i \\ 1 & 0 & 1 & c_i \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_i \\ 0 & 0 & 1 & b_i - a_i \\ 1 & 0 & 1 & c_i \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_i \\ 0 & 0 & 1 & b_i - a_i \\ 0 & -1 & 1 & c_i - a_i \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_i \\ 0 & 0 & 1 & b_i - a_i \\ 0 & 1 & -1 & a_i - c_i \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & -1 & a_i - c_i \\ 0 & 0 & 1 & b_i - a_i \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & b_i - c_i \\ 0 & 0 & 1 & b_i - a_i \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a_i - b_i + c_i \\ 0 & 1 & 0 & b_i - c_i \\ 0 & 0 & 1 & b_i - a_i \end{array}\right)$$

che ci dice che $\underline{v_i} = (a_i - b_i + c_i, b_i - c_i, b_i - a_i)^T$.

Per q_1 abbiamo $\underline{b^1} = (0,1,0)^T$ dunque $\underline{v_1} = (-1,1,1)^T$; per q_2 abbiamo $\underline{b^2} = (1,3,1)^T$ dunque $\underline{v_2} = (-1,2,2)^T$; infine, visto che $q_3 = 2q_2$ otteniamo $\underline{v_3} = (-2,4,4)^T$.

(c)

Chiamiamo $W := \operatorname{span}\{q_1, q_2, q_3\}$. W è uno spazio vettoriale finitamente generato, e $S := \{q_1, q_2, q_3\}$ è un suo sottoinsieme finito di generatori; per il Corollario 4.39, possiamo estrarre da S una base B di W.

Di certo solo uno tra q_2 e q_3 può appartenere a B, perchè questi due vettori sono uno multiplo dell'altro e quindi linearmente dipendenti (Esempio 4.31); scegliamo q_2. Allo stesso modo, il fatto che q_1 e q_2 non siano multipli uno dell'altro ci dice che sono linearmente indipendenti, quindi otteniamo $B = \{q_1, q_2\}$.

Adesso dobbiamo estendere B ad una base di V, la cui base canonica è $\{1, x = q_1, x^2\}$; visto che $q_2 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot x + 1 \cdot x^2$, per il lemma dello scambio sostituendo q_2 ad 1 (o ad x^2) otteniamo un'altra base di V.

Esercizio 4

Chiamiamo i tre vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}.$$

Sia $W = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$: è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$. Se dimostriamo che $\dim W = 3$ allora per la Proposizione 4.48 nelle Note del Corso, abbiamo anche che $W = \mathbf{R}^3$, cioè che i tre vettori sono generatori di $\mathbf{R}^3$. Questo basta per dimostrare che sono una base: per il Teorema della scelta della base, ogni insieme di generatori contiene una base, e poiché sappiamo che la cardinalità di ogni base di $\mathbf{R}^3$ è 3, si devono scegliere (almeno) 3 vettori in $\{v_1, v_2, v_3\}$ per avere una base, ovvero se v_1, v_2, v_3 sono generatori di $\mathbf{R}^3$, devono essere una base.

Sia

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Per la definizione di rango per colonne di una matrice (Definizione 4.50), abbiamo: $\dim W = \dim \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \operatorname{rg} A$. Dal momento che il rango per righe è uguale al rango per colonne ed è uguale al numero di pivots di una forma a scala delle matrice, possiamo applicare l'algoritmo di Gauss ad A nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} =: A'$$

dove nel primo passaggio abbiamo sottratto alla seconda riga a volte la prima, e sottratto all terza a^2 volte la prima. Nel secondo passaggio abbiamo sottratto alla terza riga $b+a$ volte la seconda, sicché $* = c^2 - a^2 - (b+a)(c-a) = (c-a)(c+a-b-a) = (c-a)(c-b)$. Quindi $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 3$ se e solo se i termini $b - a$ e $(c-a)(c-b)$ sono diversi da zero, cioè se e solo se $a \neq b \neq c \neq a$.