Soluzioni Tutorato 3

(1) Sia V lo spazio generato da $(1,-1,0,1)$ e $(-1,0,3,0)$. Si trovino le equazione cartesiani per V.

Soluzione: Lo spazio generato da $(1,-1,0,1)$ e $(-1,0,3,0)$ consiste da

$$\left\{ t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\0\\3\\0\end{pmatrix} : s,t\in\mathbf{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}t-s\\-t\\3s\\t\end{pmatrix} : s,t\in\mathbf{R}\right\}$$

Quindi troviamo delle equazioni

$$\begin{cases} x_1 &= t-s\\ x_2 &= -t\\ x_3 &= 3s\\ x_4 &= t\end{cases}$$

Allora l'ultima equazione si dà $t=x_4$. Sostituendolo nella prima equazione dà $s=t-x_1=x_4-x_1$ e troviamo che i due equazioni rimanenti sono

$$x_2=-x_4, x_3=3(x_4-x_1).$$

Quindi $x_2+x_4=3x_1+x_3-3x_4=0$ sono equazioni di V.

In alternativo, possiamo usare che un vettore $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{R}^4$ è in V se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 3 & 0\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{pmatrix}$$

ha rango 2. Per calcolare il rango di tale matrice operiamo sulle righe tramite operazioni elementari:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 3 & 0\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{pmatrix} \xrightarrow[III'=III-xI]{II'=II+I} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & x_1+x_2 & x_3 & x_4-x_1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III'=III+(x_1+x_2)I} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & x_3+3(x_1+x_2) & x_4-x_1+(x_1+x_2)\end{pmatrix}.$$

Si ha quindi che V è descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2+x_3=0\\ x_2+x_4=0.\end{cases}$$

(2) Siano U_1,U_2 due sottospazi di $\mathbf{R}^4$, con

$$U_1=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\middle|\ \begin{matrix}x_1+x_2+x_3=0\\ x_2+x_3-x_4=0\end{matrix}\right\} \text{ e } U_2=\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}\right).$$

Si determinino basi per $U_1,U_2,U_1\cap U_2,U_1+U_2$.

Soluzione:

Iniziamo trovando una base per U_1. Dalla descrizione cartesiana ricaviamo che i vettori in U_1 soddisfano

$$\begin{cases} x_1=-x_2-x_3\\ x_4=x_2+x_3,\end{cases}$$

pertanto sono della forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Segue che $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è un sistema di generatori per U_1. Dal momento che questi due generatori sono anche fra di loro linearmente indipendenti, essi costituiscono una base per U_1.
I due generatori per U_2 dati si vede che sono linearmente indipendenti:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \lambda + \mu \\ \lambda + 2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Pertanto essi costituiscono già una base per lo spazio U_2. Ricaviamo comunque delle equazioni cartesiane per tale spazio: sono le equazioni che garantiscono che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

sia 2. Dal momento che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{III' = III - x_1 I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & x_2 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III' = III - x_2 II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 - x_2 & x_4 - x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

le equazioni cercate sono quindi

$$U_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

In questo modo vediamo che $U_1 \cap U_2$ è descritto dal sistema di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, \end{cases}$$

sistema che una volta risolto ha per soluzione

$$\begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -x_1. \end{cases}$$

I vettori di $U_1 \cap U_2$ sono quindi tutti e soli quelli della forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e ne deduciamo quindi che una base per $U_1 \cap U_2$ è data dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Infine, per trovare una base di $U_1 + U_2$ possiamo agire con delle operazioni elementari sulle righe della matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che grazie alla formula di Grassmann già sappiamo che tale matrice ha rango 3. Si ha poi

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[III'=III+I]{II'=II-I} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV'=IV+II]{III'=III+II}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV'=IV-II]{III'=\frac{1}{2}III} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto una base per $U_1 + U_2$ è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3) Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si determini una base dello spazio delle colonne di A e una base dello spazio delle righe di A.

Soluzione: Determiniamo per prima cosa una base per lo spazio delle righe di A, agendo su di essa per mezzo di operazioni elementari sulle righe:

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[II'=II+\frac{3}{2}I]{I'=\frac{1}{2}I} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV'=II]{II'=IV} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[IV'=IV+9II]{III'=III-9II} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -37 \\ 0 & 0 & 37 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV'=IV+III]{III=-\frac{1}{37}III} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne deduciamo che lo spazio delle righe di A ha dimensione 3, il che porta come conseguenza che:

(a) una base per lo spazio delle righe di A è la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbf{R}^3$;

(b) le colonne di A, che per definizione generano lo spazio delle colonne, sono linearmente indipendenti e quindi anche una base per tale spazio.

(4) Sia A la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -3 \\ -2 & 4 & -2 & 6 \\ -1 & 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$
Si determini una base di $\mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0})$.

*Soluzione:*Procediamo applicando il metodo di eliminazione di Gauss per ricondurre la matrice A in forma a scala.
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -3 \\ -2 & 4 & -2 & 6 \\ -1 & 7 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[III'=III+I]{II'=II+2I} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 10 & 8 & 0 \\ 0 & 10 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[III'=III-II]{II'=\frac{1}{2}II} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Tale matrice corrisponde ad un sistema le cui soluzioni sono date da
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{13}{5}x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -\frac{4}{5}x_3. \end{cases}$$
Pertanto, una base per lo spazio delle soluzioni del sistema $(A|0)$ è
$$\begin{pmatrix} 13 \\ 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(5) Sia $V = \mathrm{span}\{(1,1,0,0),(0,1,2,3)\}$. Si determini un sottospazio W di $\mathbf{R}^4$ tale che $V \oplus W = \mathbf{R}^4$.

Soluzione: I vettori $(1,1,0,0)$ e $(0,1,2,3)$ sono linearmente indipendente. Quindi $\dim V = 2$. Per avere $V \oplus W = \mathbf{R}^4$ basta avere $\dim W = \dim \mathbf{R}^4 - \dim W = 4 - 2 = 2$ e che l'unione della base di W e la base di V è una base di $\mathbf{R}^4$. Se prendiamo $W = \mathrm{span}\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$, allora $\dim W = 2$. La matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
è in forma a scala e ha rango 4. Quindi le righe sono linearmente indipendente e
$$\{(1,1,0,0),(0,1,2,3),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$
è una base di $\mathbf{R}^4$. (Ci sono molto altre soluzioni per esempio $W = \mathrm{span}\{(1,0,0,0),(0,0,1,0))\}$ funziona anche, ma $W = \mathrm{span}\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$ non funziona.

6. Didattica integrativa 3

(1) Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$.
   (a) Si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale $V = \langle (1,1,1,1), (0,0,1,2), (1,1,0,-1) \rangle$.
   (b) Si determini la dimensione e una base dello spazio vettoriale S delle soluzioni del sistema omogeneo in (x, y, z, t)
$$\begin{cases} x - 3z + t = 0 \\ x + y - 4z + 2t = 0 \end{cases}$$
   (c) Determinare (mostrare una base e la dimensione) $S + V$ e $S \cap V$.

(2) Sia A una matrice $m \times n$ e B una matrice $n \times p$. Si dimostri che $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(A)$.

(3) Siano U_1, U_2 sottospazi di uno spazio vettoriale V. Siano B_1, B_2 basi per V_1, V_2. Allora si dimostrino o si trovi un controesempio alle seguenti affermazioni.
   (a) $B_1 \cup B_2$ è una base di $V_1 + V_2$.
   (b) $B_1 \cup B_2$ genera $V_1 + V_2$.
   (c) $B_1 \cap B_2$ genera $V_1 \cap V_2$.

(4) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ con coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4), si considerino i due sottospazi
$$U = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2-\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\alpha - 3 \\ 2 \\ -4 + 3\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$
$$W = \left\{ x \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & - & \alpha x_2 & + & x_4 = 0 \\ (\alpha - 1)x_2 & & - & & x_3 = 0 \end{array} \right. \right\}.$$
   (a) Calcolare la dimensione di U e trovarne una base.
   (b) Calcolare la dimensione di W e trovarne una base.
   (c) Calcolare la dimensione di $U \cap W$ e trovarne una base.
   (d) Quanto vale allora la dimensione di $U + W$? Dare un sistema di equazioni cartesiane per $U + W$.