6. Didattica integrativa 3

(1) Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$.
  (a) Si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale $V = \langle(1,1,1,1),(0,0,1,2),(1,1,0,-1)\rangle$.
  (b) Si determini la dimensione e una base dello spazio vettoriale S delle soluzioni del sistema omogeneo in (x,y,z,t)
$$\begin{cases} x-3z+t=0 \\ x+y-4z+2t=0 \end{cases}$$
  (c) Determinare (mostrare una base e la dimensione) $S+V$ e $S\cap V$.

(2) Sia A una matrice $m\times n$ e B una matrice $n\times p$. Si dimostri che $\mathrm{rg}(AB)\leq \mathrm{rg}(A)$.

(3) Siano U_1, U_2 sottospazi di uno spazio vettoriale V. Siano B_1, B_2 basi per V_1, V_2. Allora si dimostrino o si trovi un controesempio alle seguenti affermazioni.
  (a) $B_1\cup B_2$ è una base di V_1+V_2.
  (b) $B_1\cup B_2$ genera V_1+V_2.
  (c) $B_1\cap B_2$ genera $V_1\cap V_2$.

(4) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ con coordinate (x_1,x_2,x_3,x_4), si considerino i due sottospazi
$$U=\left\langle \begin{pmatrix}\alpha\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2-\alpha\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\alpha-3\\2\\-4+3\alpha\\1\end{pmatrix}\right\rangle,$$
$$W=\left\{x\in\mathbf{R}^4 \,\middle|\, \begin{cases} x_1 - \alpha x_2 + x_4 = 0 \\ (\alpha-1)x_2 - x_3 = 0 \end{cases}\right\}.$$
  (a) Calcolare la dimensione di U e trovarne una base.
  (b) Calcolare la dimensione di W e trovarne una base.
  (c) Calcolare la dimensione di $U\cap W$ e trovarne una base.
  (d) Quanto vale allora la dimensione di $U+W$? Dare un sistema di equazioni cartesiane per $U+W$.