7. Tutorato 4

(1) Si dica se le seguenti funzioni sono lineari:
  (a) $f_1 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2, x_3)$.
  (b) $f_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da $(x_1, x_2) \mapsto (2x_1 + x_2, x_1 - x_2^2)$.
  (c) $f_3 : \mathbf{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbf{R}^2$ definita da $p(x) \mapsto (\int_1^2 p(x)dx, p(-1))$.
(2) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la riflessione rispetto alla retta $x_2 = x_1$. Si diano equazioni esplicite per f. La mappa f è lineare?
(3) Si dia un esempio di funzione lineare iniettiva $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}[x]_{\leq 5}$ tale che $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ è nell'immagine di f.
(4) Si dia un esempio di funzione lineare biiettiva $f : \mathbf{R}[x]_{\leq 4} \to \mathbf{R}^5$.
(5) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ data da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

  Si determini una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f. Si verifichi nell'esempio dato il teorema del rango.
(6) Sia $T \subset \mathbf{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1, 1, 1, 2)$, $v_2 = (3, 0, 0, -1)$. Sia S il sottospazio dato dalle soluzioni nelle incognite (x, y, z, w) delle equazioni

$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 0 \\ -x + 2z + 2w = 0 \end{cases}$$

  (a) Determinare $S \cap T$.
  (b) Dare una base di $S + T$
  (c) Determinare un sottospazio L di $\mathbf{R}^4$ per cui $(T + S) \oplus L = \mathbf{R}^4$.
  (d) Determinare un altro L_1, $L_1 \neq L$ tale che $(T + S) \oplus L_1 = \mathbf{R}^4$ e $L \oplus L_1$. Può essere $L \oplus L_1 = \mathbf{R}^4$?
  (e) Determinare un sottospazio M di $\mathbf{R}^4$ diverso da S e di dimensione 2, tale che $T + S = T + M$.