Supporto alla didattica 3 - 2-6/11/2020 - Soluzioni

Esercizio 1

(a)

Siano $v_1 := (1,1,1,1)^T$, $v_2 := (0,0,1,2)^T$, $v_3 := (1,1,0,-1)^T$ e $Q := \{v_1, v_2, v_3\}$. Visto che nessun v_i è multiplo di un v_j con $j \neq i$, possiamo dedurre che Q contiene almeno due vettori tra loro linearmente indipendenti, e quindi che $dim(V) \geq 2$; dobbiamo adesso capire se V ha dimensione 2 o 3. Per trovare la risposta, dobbiamo vedere se il sistema omogeneo $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i = \underline{0}$ ha soluzioni non banali; riduciamo dunque a scala la matrice dei coefficienti associata a questo sistema (che non è altro che la matrice 4×3 avente i v_i come colonne):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo solo due pivot, quindi il sistema ha soluzioni non banali e di conseguenza esiste una combinazione lineare dei v_i con i coefficienti λ_i non tutti nulli che dà $\underline{0}$ (una di queste è ad esempio $-v_1 - v_2 + v_3 = 0$). L'insieme Q è dunque linearmente dipendente, e quindi $dim(V) = 2$; per quanto osservato all'inizio (o, alternativamente, per il fatto che i λ_i che danno una combinazione lineare $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i = \underline{0}$ sono tutti diversi da 0) per ottenere una base di V ci basta scegliere 2 dei 3 vettori v_i, ad esempio v_2 e v_3.

(b)

Riduciamo a scala la matrice dei coefficienti di questo sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Da questa scrittura ricaviamo che $y = z - t$ e $x = 3z - t$, mentre t e z sono variabili libere; l'insieme S delle soluzioni può dunque essere descritto come

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 3z - t \\ z - t \\ z \\ t \end{pmatrix} \middle| z, t \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \middle| z, t \in \mathbf{R} \right\} = Span\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ed ha quindi dimensione 2. Chiamiamo $w_1 := (3,1,1,0)^T$ e $w_2 := (-1,-1,0,1)^T$.

(c)

Visto che $V = \text{span}\{v_2, v_3\}$ e $S = \text{span}\{w_1, w_2\}$, sappiamo che $S + V$ è generato da $\{v_2, v_3, w_1, w_2\}$; da questo insieme vogliamo estrarre una base, quindi dobbiamo determinare un suo sottoinsieme linearmente indipendente massimale B. Osserviamo subito che $w_2 = -v_3$, dunque uno di quei due vettori (diciamo w_2) sicuramente non farà parte di B, che sarà dunque un sottoinsieme (non necessariamente proprio) di $\{w_1, v_2, v_3\}$. Per vedere se questi tre vettori di $\mathbf{R}^4$ sono linearmente indipendenti, come nel punto (a) riduciamo a scala la matrice che li ha come vettori colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo 3 pivot, dunque $B = \{w_1, v_2, v_3\}$ è una base di $S + V$ che ha quindi dimensione 3

Passiamo adesso a $S \cap V$. Gli elementi di V possono essere scritti come

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mu \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \mu \\ 2\mu - \lambda \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbf{R} \right\}$$

Per vedere quali tra i vettori di questo tipo appartegono anche a S, nel sistema al punto (b) effettuiamo le sostituzioni $x = y = \lambda$, $z = \mu$ e $t = 2\mu - \lambda$, e risolviamo il sistema in λ, μ che otteniamo, ovvero

$$\begin{cases} \lambda - 3\mu + (2\mu - \lambda) = 0 \\ \lambda + \lambda - 4\mu + 2(2\mu - \lambda) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\mu = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Di conseguenza gli unici vettori di V che appartengono ad S sono quelli multipli di v_3; questo significa che $S \cap V = \text{span}\{v_3\}$, e quindi che $dim(S \cap V) = 1$.

Esercizio 2

Chiamiamo $r := \text{rk}(A)$ il rango di A. Sia A' una forma a scala di A: abbiamo allora che $A' = EA$, dove E è un prodotto di matrici elementari. Poiché il rango resta invariante applicando operazioni elementari, abbiamo che $\text{rk}(A) = \text{rk}(A')$. Quindi A' ha r pivot e le sue ultime $m - r$ righe sono nulle.

Ora, siccome E è un prodotto di matrici elementari, notiamo che $\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(EAB) = \mathrm{rk}(A'B)$. Quindi ci basta mostrare che $\mathrm{rk}(A'B) \leq r$. Come è fatta $A'B$? Abbiamo che

$$(A'B)_{ij} = \sum_{k=0}^{n} a'_{ik} b_{kj},$$

ma se $i > r$ allora $a'_{ik} = 0$ per ogni k, poichè le ultime $m - r$ righe di A' sono nulle. Quindi $(A'B)_{ij} = 0$ per ogni $i > r$, ovvero anche le ultime $m - r$ righe di $A'B$ sono nulle. Ciò implica che $\mathrm{rk}(A'B) \leq r$.

Esercizio 3

Siano $B_1 = \{u, v\}$ e $B_2 = \{w, z\}$ basi rispettivamente di V_1 e V_2.

(a) FALSO: ad esempio se w fosse una combinazione lineare di u e v l'insieme $\{u, v, w, z\}$ non sarebbe linearmente indipendente e quindi non sarebbe una base.

(b) VERO: per definizione $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\} = \{(\lambda_1 u + \lambda_2 v) + (\lambda_3 w + \lambda_4 z) | \lambda_i \in \mathbf{K}\} = \mathrm{span}\{u, v, w, z\} = \mathrm{span}(B_1 \cup B_2)$.

(c) FALSO: ad esempio se B_1 e B_2 fossero basi diverse dello stesso sottospazio vettoriale (ammettiamo che $w, z \notin B_1$) avremmo $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ mentre $V_1 \cap V_2 = V_1 \neq \{\underline{0}\}$.

Esercizio 4

(a)

Chiamiamo $u_1 := (\alpha, 1, 1, 2)^T$, $u_2 := (1, 0, 2 - \alpha, 1)^T$ e $u_3 := (2\alpha - 3, 2, 3\alpha - 4, 1)^T$, ed indichiamo con $A := (u_1 | u_2 | u_3)$ la matrice 4×3 avente gli u_i per colonne; gli u_i sono linearmente indipendenti se e solo se l'unica loro combinazione lineare $\sum_i \lambda_i u_i$ a dare il vettore nullo è quella con $\lambda_i = 0$ per ogni i, ovvero se e solo se $Sol(A, \underline{0}) = \{\underline{0}\}$. Procediamo pertanto alla riduzione a scala della matrice A:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2\alpha - 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 - \alpha & 3\alpha - 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \alpha & 1 & 2\alpha - 3 \\ 1 & 2 - \alpha & 3\alpha - 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 - \alpha & 3(\alpha - 2) \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Innanzitutto scambiamo la prima riga con la seconda (primo passaggio). Per ottenere 0 nelle posizioni $(j, 1)$ con $j > 1$ operiamo nel modo seguente: sommiamo alla seconda riga la prima moltiplicata per $-\alpha$, sottraiamo la prima riga dalla terza e sommiamo alla quarta la prima moltiplicata per -2 (secondo passaggio). Nell'ultimo passaggio sottraiamo la seconda riga alla quarta e sommiamo alla terza riga la seconda moltiplicata per $\alpha - 2$.

La forma a scala ottenuta ci dice che $Sol(A, \underline{0}) = \mathrm{span}\{(-2, 3, 1)^T\}$, e infatti $-2u_1 + 3u_2 + u_3 = 0$ cioè p.e. $u_3 = 2u_1 - 3u_2$; di conseguenza l'insieme $\{u_1, u_2, u_3\}$ non è linearmente indipendente e non può quindi essere una base per U. Visto che i coefficienti di una combinazione lineare degli u_i che dà $\underline{0}$ sono tutti non nulli, per ottenere una base di U basta scartare uno qualsiasi degli u_i (osservate che ciascuna coppia $\{u_i, u_j\}$ con $i \neq j$ è linearmente indipendente); scartiamo u_3, che è il vettore dove α compare più spesso. Possiamo concludere che U ha dimensione 2, e che può essere scritto come $U = \text{span}\{u_1, u_2\}$.

(b)

Per trovare una base (e quindi la dimensione) di W dobbiamo risolvere il sistema lineare omogeneo che lo definisce, e per farlo dobbiamo ridurre a scala la matrice 2×4 dei coefficienti. O meglio, avremmo dovuto, perchè fortunatamente la matrice completa è già in forma a scala.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La seconda riga dà $(\alpha - 1)x_2 = x_3$, quindi dobbiamo distinguere due casi:

1. $\alpha \neq 1$: la soluzione che otteniamo è $x_3, x_4 \in \mathbf{R}$, $x_2 = \frac{1}{\alpha-1}x_3$ e $x_1 = \alpha x_2 - x_4 = \frac{\alpha}{\alpha-1}x_3 - x_4$, dunque

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha-1}x_3 - x_4 \\ \frac{1}{\alpha-1}x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_3, x_4 \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha-1} \\ \frac{1}{\alpha-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 \middle| x_3, x_4 \in \mathbf{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha-1} \\ \frac{1}{\alpha-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. $\alpha = 1$: otteniamo $0x_2 = x_3$, quindi la soluzione è $x_3 = 0$, $x_2, x_4 \in \mathbf{R}$, $x_1 = x_2 - x_4$, e dunque

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 - x_4 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_4 \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 \middle| x_2, x_4 \in \mathbf{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

In entrambi i casi otteniamo una base di W, che quindi ha sempre dimensione 2. Indicheremo i vettori delle due basi con w_1 e w_2.

(c)

Primo metodo Il sottospazio U può essere scritto come

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 - \alpha \\ 1 \end{pmatrix} t \middle| s, t \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha s + t \\ s \\ s + (2 - \alpha)t \\ 2s + t \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbf{R} \right\}$$

Per determinare $U \cap W$, sostituiamo alle equazioni cartesiane di W i valori $x_1 = \alpha s + t$, $x_2 = s$, $x_3 = s + (2-\alpha)t$, $x_4 = 2s + t$ e risolviamo il sistema omogeneo nelle incognite s e t così ottenuto. Abbiamo:

$$\begin{cases} (\alpha s + t) - \alpha s + (2s + t) = 0 \\ (\alpha - 1)s - [s + (2-\alpha)t] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2s + 2t = 0 \\ (\alpha - 2)s + (\alpha - 2)t = 0 \end{cases}$$

da cui ricaviamo $s = -t$. Di conseguenza otteniamo

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} (-t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2-\alpha \\ 1 \end{pmatrix} t \,\middle|\, t \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha t + t \\ -t \\ -t + (2-\alpha)t \\ -2t + t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbf{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 1 \\ \alpha - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

In particolare $dim(U \cap W) = 1$.

Secondo metodo Per calcolare l'intersezione di due sottospazi vettoriali spesso conviene scriverli in forma cartesiana; la forma cartesiana di W la abbiamo, dobbiamo ricavare quella di U. Un vettore $x \in \mathbf{R}^4$ appartiene ad U se e solo se $x = \lambda u_1 + \mu u_2$, e per vedere quali condizioni soddisfano gli x_i di un vettore x così esprimibile risolviamo il sistema omogeneo $\lambda u_1 + \mu u_2 - x = \underline{0}$ nelle incognite λ, μ, x_i portando in forma a scala la matrice dei coefficienti (la prima matrice sottostante è la matrice dei coefficienti dopo i seguenti scambi di righe: la seconda riga diventa la prima, la prima diventa la quarta, la terza diventa la seconda e la quarta diventa la terza):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\alpha & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\alpha & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\alpha & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\alpha & (\alpha-1)^2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\alpha & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha - 3 & -1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$$

Le equazioni cartesiane di U sono date dalle righe in cui i pivot corrispondono alle indeterminate x_i, in questo caso le ultime due (con pivot corrispondenti ad x_1 e x_2); di conseguenza

$$U = \left\{ x \in \mathbf{R}^4 \,\middle|\, \begin{cases} x_1 + (2-\alpha)x_2 - x_4 = 0 \\ (2\alpha - 3)x_2 - x_3 + (2-\alpha)x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

e le equazioni cartesiane di $U \cap W$ saranno semplicemente l'insieme delle equazioni che definiscono U e W:

$$U \cap W = \left\{ x \in \mathbf{R}^4 \middle| \begin{cases} x_1 - \alpha x_2 + x_4 = 0 \\ (\alpha - 1)x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + (2-\alpha)x_2 - x_4 = 0 \\ (2\alpha - 3)x_2 - x_3 + (2-\alpha)x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

Adesso, detta M la matrice dei coefficienti del sistema omogeneo che definisce $U \cap W$, dobbiamo trovare $Sol(M, \underline{0})$; riduciamo M a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & -1 & 0 \\ 1 & 2-\alpha & 0 & -1 \\ 0 & 2\alpha-3 & -1 & 2-\alpha \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & \alpha-1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\alpha-3 & -1 & 2-\alpha \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza $Sol(M, \underline{0}) = \{x \in \mathbf{R}^4 | x_4 \in \mathbf{R}, x_3 = (\alpha-1)x_4, x_2 = x_4, x_1 = \alpha x_2 - x_4 = (\alpha-1)x_4\}$ quindi

$$U \cap W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 1 \\ \alpha-1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dunque $dim(U \cap W) = 1$.

(d)

Usando la formula di Grassmann otteniamo $dim(U+W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$ indipendentemente dal valore di α; per determinare una base di $U + W$ dobbiamo invece distinguere due casi in base al valore di α

Se $\alpha = 1$ abbiamo

$$U+V = \operatorname{span}\{u_1, u_2, w_1, w_2\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =: \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

ma visto che $dim(U+W) = 3$ sicuramente $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ non è linearmente indipendente, ed infatti si osserva immediatamente che $v_1 = v_2 + v_3 + v_4$; di conseguenza una base per $U + W$ è $\{v_2, v_3, v_4\}$. Per trovare un sistema di equazioni cartesiane di $U + W$ dobbiamo ridurre a scala la matrice $(v_2|v_3|v_4| - I_4)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Dunque $U + W = \{x \in \mathbf{R}^4 | -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}$ (osserviamo che i vettori v_1, v_2, v_3 soddisfano queste condizioni, il che è un grosso indizio a favore della correttezza dei calcoli svolti).

Se $\alpha \neq 1$ abbiamo (dopo aver moltiplicato w_1 per $\alpha - 1$)

$$U+V = \text{span}\{u_1, u_2, w_1, w_2\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2-\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha - 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =: \text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

ma visto che $dim(U+W) = 3$ sicuramente $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ non è linearmente indipendente, ed infatti si osserva di nuovo che $v_1 = v_2 + v_3 + v_4$; di conseguenza una base per $U+W$ è $\{v_2, v_3, v_4\}$. Per trovare un sistema di equazioni cartesiane di $U+W$ dobbiamo ridurre a scala la matrice $(v_2|v_3|v_4| - I_4)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2-\alpha & \alpha-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2-\alpha-1 & 2-\alpha & 2-\alpha & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\alpha & 2-\alpha & \alpha^2-\alpha-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -\alpha & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -\alpha & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2-\alpha}{2} & \frac{\alpha^2-2}{2} & -1 & \frac{2-\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

Dunque (dopo una moltiplicazione per 2) $U+W = \{x \in \mathbf{R}^4 | (2-\alpha)x_1 + (\alpha^2-2)x_2 - 2x_3 + (2-\alpha)x_4 = 0\}$