8. Didattica integrativa 4

(1) Sia $V = \text{span}\{(1,2,3,4),(1,1,1,1)\}$. Sia W dato $x_1+x_2=0, x_3+x_4=0$. I sottospazi V e W sono in somma diretta? Si determini un sottospazio U di $\mathbf{R}^4$ tale che $U \oplus V = U \oplus W = \mathbf{R}^4$

(2) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$
  (a) Determinare un endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ che abbia come $\ker f = \langle(1,1,0)\rangle$ e $\text{im}\, f = \langle(0,1,-1),(2,1,2)\rangle$. Se ne dia la matrice associata alla base canonica.
  (b) Tale f è unica? Perché?

(3) Sia $V = \mathbf{R}[x]_{\leq 4}$. Consideriamo la mappa $f : V \to \mathbf{R}^3$ data da $f(p(x)) = (p(0), p'(0), p(1))$.
  (a) Si mostri che f è lineare.
  (b) Si determini una base per il nucleo di f e una base per l'immagine di f.

(4) Siano A, B matrici $n \times n$. La *traccia* $\text{tr}(A)$ di A è la somma degli elementi sulla diagonale. Quindi

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

  (a) Si dimostri che $\text{tr} : M_{n\times n}(K) \to K$ è una funzione lineare.
  (b) Si dimostri che $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
  (c) Sia $Q \in M_{n\times n}(K)$ una matrice invertibile. Si dimostri che

$$\text{tr}(Q^{-1}AQ) = \text{tr}(A).$$

(5) Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $f : V \to V$ una funzione lineare. Si dimostri che $\ker(f) \subset \ker(f\circ f)$ and $\text{im}(f\circ f) \subset \text{im}(f)$. Si dimostri che se $\ker(f \circ f) = \ker(f)$ allora $\text{im}(f \circ f) = \text{im}(f)$.