9. Tutorato 5

(1) Siano $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ e $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ date da

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_4 \end{pmatrix} \text{ e } g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo $A = ((1,0,1,0)^T, (1,4,2,2)^T, (1,1,1,1)^T, (2,0,3,0)^T)$, $B = ((1,0)^T, (0,1)^T)$ e $C = ((1,3,4)^T, (2,0,1)^T, (1,1,2)^T)$ basi per $\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$ rispettivamente.

(a) Si determini la matrice di f e g rispetto alle basi canoniche.
(b) Si determini la matrice di f rispetto alle basi A e B.
(c) Si determini la matrice di g rispetto alle basi B e C.
(d) Si determini la matrice di $g \circ f$ rispetto alle basi A e C.
(e) Si determinino le matrici di cambiamento di base $T_A^{E_4}$ e $T_{E_3}^{C}$ dove E_n è la base canonica di $\mathbf{R}^n$ e si verifichi la formula per le matrici di cambiamento di base.

(2) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini una base dello spazio delle colonne di A.
(b) Si determini una base di $\mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0})$.
(c) Si determini se $\mathrm{Sol}(A, b)$ e $\mathrm{Sol}(A, c)$ sono vuoti o non vuoti. Nel caso che siano non vuoti, determinare un vettore v_1 tale che $\mathrm{Sol}(A, b) = v_1 + \mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0})$ risp. v_2 tale che $\mathrm{Sol}(A, c) = v_2 + \mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0})$.

(3) Sia $f : \mathbf{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbf{R}[X]_{\leq 3}$ la funzione che manda $p(x)$ in $(p(x)+p(-x))/2$. Si determinino la matrice associata ad f rispetto alla base canonica, il nucleo e l'immagine di f.