Supporto alla didattica 4 - 09-13/10/2020 - Soluzioni

Esercizio 1

Per mostrare che V e W sono in somma diretta dobbiamo far vedere che $V \cap W = \{\vec{0}\}$. Abbiamo che

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ 2t_1 \\ 3t_1 \\ 4t_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_2 \\ t_2 \\ t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 + t_2 \\ 2t_1 + t_2 \\ 3t_1 + t_2 \\ 4t_1 + t_2 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

Possiamo considerare $V \cap W$ come il sottospazio formato dai vettori di V che soddisfano le equazioni cartesiane di W: perciò abbiamo

$$V \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 + t_2 \\ 2t_1 + t_2 \\ 3t_1 + t_2 \\ 4t_1 + t_2 \end{pmatrix} \middle| (*) \begin{cases} (t_1 + t_2) + (2t_1 + t_2) & = 0 \\ (3t_1 + t_2) + (4t_1 + t_2) & = 0 \end{cases} \right\}.$$

Si mostra facilmente che il sistema $(*)$ ha come unica soluzione $t_1 = t_2 = 0$, quindi $V \cap W = \{\vec{0}\}$.

Ora dobbiamo trovare un sottospazio U che soddisfi $U \oplus V = U \oplus W = \mathbf{R}^4$. Per prima cosa osserviamo che V ha dimensione 2: infatti se poniamo $v_1 := (1, 2, 3, 4)$ e $v_2 := (1, 1, 1, 1)$, è facile vedere che questi due vettori sono una base di V. Inoltre anche $\dim W = 2$: ponendo x_1 e x_3 come variabili libere si vede facilmente che

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_3 \in \mathbf{R} \right\},$$

quindi una base di W è data dai vettori $w_1 := (1, -1, 0, 0)$ e $w_2 := (0, 0, 1, -1)$. Dalla formula di Grassmann segue quindi che la dimensione di U deve essere 2.

Notiamo ora che è sufficiente trovare due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tali che gli insiemi $\{v_1, v_2, \vec{a}, \vec{b}\}$ e $\{w_1, w_2, \vec{a}, \vec{b}\}$ siano entrambi basi di $\mathbf{R}^4$. In tal modo il sottospazio $U = \mathrm{span}\{\vec{a}, \vec{b}\}$ soddisferà le condizioni richieste.

Ci basta quindi trovare due quaterne di numeri $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ tali che le matrici

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

abbiano una forma a scala con quattro pivot (poiché ciò implica che i vettori riga di ogni matrice sono linearmente indipendenti, e quindi sono una base di $\mathbf{R}^4$ in quanto sono

$4 = \dim \mathbf{R}^4$). Ora una possibile strategia è quella di cercare di indovinare dei valori degli a_i e b_i che soddisfino le condizioni richieste. Cominciamo provando un caso semplice: poniamo $a_1 = a_3 = a_4 = 0$, $a_2 = 1$, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $b_4 = 1$. Allora la matrice B, scambiando la seconda e la terza riga, diventa equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è una forma a scala con quattro pivot. Applicando una semplice eliminazione di Gauss anche alla matrice A otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

quindi anche A ha una forma a scala con quattro pivot.

In conclusione, abbiamo che il sottospazio

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

soddisfa le condizioni richieste.

Esercizio 2

(a)

Vogliamo determinare un'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il cui nucleo $\ker(f)$ sia il sottospazio generato dal vettore $(1, 1, 0)$ e la cui immagine $\mathrm{im}(f)$ coincida con $\mathrm{span}\{(0, 1, -1), (2, 1, 2)\}$. Infine, dobbiamo scrivere la matrice associata a tale f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$, cioè $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Visto che per le funzioni lineari vale $f(\lambda v) = \lambda f(v)$, per soddisfare la prima condizione basta imporre $f((1, 1, 0)) = \underline{0}$.

Ora, se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ la linearità di f ci consente di scrivere $\mathrm{im}(f) = \mathrm{span}\{f(v_1), f(v_2), f(v_3)\}$; visto che già sappiamo che $f((1, 1, 0)) = \underline{0}$, il modo più semplice per ottenere $\mathrm{im}(f) = \mathrm{span}\{(0, 1, -1), (2, 1, 2)\}$ è prendere $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2, v_3 \in \mathbf{R}^3$ tali che $\{(1, 1, 0), v_2, v_3\}$ sia effettivamente una base di $\mathbf{R}^3$, ed imporre $f(v_2) = (0, 1, -1)$ e $f(v_3) = (2, 1, 2)$. Una scelta possibile è ad esempio $v_2 = e_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = e_3 = (0, 0, 1)$.

La matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ è la matrice avente per colonne i vettori $f(e_1)$, $f(e_2)$ ed $f(e_3)$; gli ultimi due li conosciamo, dobbiamo determinare $f(e_1)$. Visto che $e_1 = v_1 - e_2$, dalla linearità di f segue che $f(e_1) = f(v_1 - e_2) =$

$f(v_1) - f(e_2) = \underline{0} - (0,1,-1) = (0,-1,1)$. La matrice associata ad f rispetto alla base canonica è dunque

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ora che abbiamo questa matrice, (equivalentemente, ora che conosciamo i vettori $f(e_i)$) possiamo scrivere f in "forma esplicita": infatti per la linearità abbiamo

$$f((x,y,z)) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3),$$

quindi

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2z \\ -x+y+z \\ x-y+2z \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $f(x,y,z) = M_f(x,y,z)^T$.

(b)

La funzione f determinata al punto precedente *non è unica*: se per esempio scegliessimo v_2 e v_3 in modo diverso (ma sempre tali che $\mathbf{R}^3 = \mathrm{span}\{(1,1,0), v_2, v_3\}$) ed imponessimo $g((1,1,0)) = \underline{0}$, $g(v_2) = (0,1,-1)$, $g(v_3) = (2,1,2)$ otterremmo ancora una funzione lineare g con $\ker(g) = \mathrm{span}\{(1,1,0)\}$ e $\mathrm{im}(g) = \mathrm{span}\{(0,1,-1),(2,1,2)\}$, ma in generale non sarebbe vero che $f(v) = g(v)$ per ogni $v \in \mathbf{R}^3$. Ad esempio, con le scelte $v_2 = -e_2$, $v_3 = -e_3$ (che differiscono dalle precedenti solo per una moltiplicazione per -1) otterremmo una funzione g tale che $g(e_1) = g(v_1+v_2) = g(v_1)+g(v_2) = \underline{0}+(0,1,-1) = (0,1,-1)$, $g(e_2) = g(-v_2) = -g(v_2) = (0,-1,1)$ e $g(e_3) = g(-v_3) = -g(v_3) = (-2,-1,-2)$; la matrice associata a g rispetto alla base canonica è

$$M_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

e la 'forma esplicita' di g è $g((x,y,z)) = g(xe_1+ye_2+ze_3) = xg(e_1)+yg(e_2)+zg(e_3)$ cioè:

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2z \\ x-y-z \\ -x+y-2z \end{pmatrix}$$

f e g sono diverse, visto che per esempio $f((0,0,1)) = (2,1,2)$ mentre $g((0,0,1)) = -(2,1,2)$.

Esercizio 3

(a) Sia $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ un polinomio in V. La sua derivata è definita come $p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$. Si mostra facilmente che la derivata è lineare, ovvero $(p + \lambda q)' = p' + \lambda q'$ per ogni $p, q \in V$ e $\lambda \in \mathbf{R}$.

Ora per mostrare che f è lineare prendiamo $p, q \in V$ e $\lambda \in \mathbf{R}$. Allora

$$\begin{aligned} f(p + \lambda q) &= ((p + \lambda q)(0), (p + \lambda q)'(0), (p + \lambda q)(1)) \\ &= (p(0) + \lambda q(0), p'(0) + \lambda q'(0), p(1) + \lambda q(1)) \\ &= (p(0), p'(0), p(1)) + (\lambda q(0), \lambda q'(0), \lambda q(1)) \\ &= f(p) + \lambda f(q). \end{aligned}$$

(b) Se poniamo $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, allora possiamo calcolare esplicitamente i valori di p e p' nei rispettivi punti, ottenendo

$$f(p) = (a_0, a_1, a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4).$$

Abbiamo quindi che $\ker f$ è formato da tutti e soli i polinomi $p \in V$ tali che

$$\begin{cases} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 0. \end{cases}$$

Sottraendo la prima e la seconda equazione alla terza abbiamo che questo sistema è equivalente a

$$\begin{cases} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 + a_3 + a_4 &= 0. \end{cases}$$

Possiamo ora scrivere equazioni parametriche per il nucleo di f:

$$\begin{aligned} \ker f &= \{p \in V \mid a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ a_4 = -a_2 - a_3\} \\ &= \{a_2x^2 + a_3x^3 + (-a_2 - a_3)x^4 \mid a_2, a_3 \in \mathbf{R}\} \\ &= \{a_2(x^2 - x^4) + a_3(x^3 - x^4) \mid a_2, a_3 \in \mathbf{R}\} \\ &= \langle x^2 - x^4, x^3 - x^4 \rangle. \end{aligned}$$

Quindi $x^2 - x^4, x^3 - x^4$ è una base di $\ker f$.

Per quanto riguarda l'immagine, notiamo che

$$\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f) = \dim(\mathbf{R}[x]_{\leq 4}) = 5,$$

quindi, poiché $\dim(\ker f) = 2$, abbiamo che $\dim(\operatorname{im} f) = 3$. Ma allora $\operatorname{im} f$ è un sottospazio di dimensione 3 di $\mathbf{R}^3$, perciò si ha necessariamente che $\operatorname{im} f = \mathbf{R}^3$. Quindi una qualsiasi base di $\mathbf{R}^3$ (ad esempio quella canonica) è una base di $\operatorname{im} f$.

Alternativamente, è possibile calcolare f sugli elementi di una base di V, ad esempio quella canonica. In questo modo si ottengono i vettori $f(1), f(x), f(x^2), f(x^3), f(x^4)$, che sono *generatori* di $\operatorname{im} f$ (ma non una base per $\operatorname{im} f$, in generale!). A questo punto, si applica l'algoritmo di Gauss alla matrice ottenuta ponendo ognuno di questi vettori sulle righe, e le righe non nulle di una sua forma forniscono una base di $\operatorname{im} f$.

Esercizio 4

(a) Per dimostrare che tr è lineare, basta dimostrare che comunque prese $A, B \in M_{n\times n}(\mathbf{K})$ e $\lambda \in \mathbf{K}$, si ha $\mathrm{tr}(A + \lambda B) = \mathrm{tr}(A) + \lambda\,\mathrm{tr}(B)$:

$$\mathrm{tr}(A + \lambda B) = \mathrm{tr}((a_{ij} + \lambda b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + \lambda b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_{ii} =$$
$$= \mathrm{tr}(A) + \lambda\,\mathrm{tr}(B)$$

(b) Detta $C := AB$, abbiamo $C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ con $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ e quindi $c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$, mentre detta $D := BA$, abbiamo $D = (d_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ con $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$ e quindi $d_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}$; di conseguenza

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}) = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ik}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}(BA)$$

(c) Basta usare il punto precedente:

$$\mathrm{tr}(Q^{-1}AQ) = \mathrm{tr}((Q^{-1}A)Q) = \mathrm{tr}(Q(Q^{-1}A)) = \mathrm{tr}((QQ^{-1})A) = \mathrm{tr}(I_nA) = \mathrm{tr}(A)$$

Esercizio 5

Denotiamo con f^2 la funzione $f \circ f$; visto che f è lineare anche f^2 è lineare, in quanto composizione di funzioni lineari.

- Se $v \in \ker(f)$ allora $f(v) = \underline{0}$; di conseguenza $f^2(v) = f(f(v)) = f(\underline{0}) = \underline{0}$ per le proprietà delle funzioni lineari. Possiamo concludere che $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.
- Se $w \in \mathrm{im}(f^2)$ allora $w = f^2(v)$ per qualche $v \in V$; detto $u := f(v)$ abbiamo che $w = f(f(v)) = f(u)$, che significa $w \in \mathrm{im}(f)$. Possiamo concludere che $\mathrm{im}(f^2) \subset \mathrm{im}(f)$.
- Visto che V è finitamente generato possiamo utilizzare la formula del rango, e lo facciamo sia per f che per f^2

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(V) = \dim(\ker(f^2)) + \dim(\mathrm{im}(f^2))$$

Se $\ker(f) = \ker(f^2)$ in particolare $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(f^2))$, dunque otteniamo $\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(\mathrm{im}(f^2))$; ma il punto precedente ci dice che $\mathrm{im}(f^2) \subset \mathrm{im}(f)$. $\mathrm{im}(f^2)$ è dunque un sottospazio vettoriale di $\mathrm{im}(f)$ la cui dimensione è la stessa di $\mathrm{im}(f)$, e questo significa che $\mathrm{im}(f^2) = \mathrm{im}(f)$.