Soluzioni Tutorato 5

(1) (a) Determiniamo le matrici associate alle funzioni lineari (verificare linearità) f e g rispetto alle basi canoniche:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Quindi dai coefficienti associati alla base canonica di $\mathbf{R}^2$ otteniamo la matrice F associata ad f:

$$F = M_{\mathcal{E}_4}^{\mathcal{E}_2}(f) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Allo stesso modo lavorando con la funzione g:

$$G = M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}(g) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

(b) Per determinare f rispetto le basi A e B lavoriamo allo stesso modo, ma selezionando come vettori di partenza di $\mathbf{R}^4$ i vettori di A e come vettori da cui determinare i coefficienti i vettori di B. Poiché B è la base canonica di $\mathbf{R}^2$ i conti sono immediati: i vettori che otteniamo applicando la funzione lineare sulla base A sono anche i vettori colonna che formano la matrice associata alla funzione (come si può anche notare dal punto precedente):

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\4\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\-1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}2\\0\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

Pertanto la matrice di f rispetto alle basi A e B è data da

$$F' = M_A^B(f) = \begin{pmatrix}2 & 11 & 4 & 5\\ 1 & -1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

(c) Nel caso della funzione g rispetto alle basi B (sempre la base canonica di $\mathbf{R}^2$) e C dobbiamo trovare i coefficienti in funzione della base dello spazio di arrivo C:

$$g\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha + 2\beta + \gamma = 1\\ 3\alpha + \gamma = 1\\ 4\alpha + \beta + 2\gamma = 3\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\alpha = -1\\ \beta = -1\\ \gamma = 4\end{cases}$$

Applicando lo stesso procedimento anche al secondo elemento della base B otteniamo come matrice associata a g rispetto alle basi B e C:

$$G' = M_B^C(g) = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}.$$

(d) Per calcolare la matrice associata alla funzione $(g \circ f)$ rispetto alle basi A e C è sufficiente moltiplicare le matrici associate ad f (rispetto ad A e B) e a g (rispetto B e C):

$$GF = M_A^C(g \circ f) = M_B^C(g)M_A^B(f);$$

$$GF = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 11 & 4 & 5\\ 1 & -1 & 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & -10 & -4 & -7\\ -2 & -11 & -4 & -5\\ 10 & 42 & 16 & 24\end{pmatrix}.$$

(e) Per determinare la matrice di cambio di base nel caso in cui una delle due basi sia la canonica i conti sono molto semplici.
Considerando il primo caso dell'esercizio, $T_A^{\mathcal{E}_4}$ (passaggio da base A a base canonica $\mathcal{E}_4$), vediamo che basta inserire in colonna i vettori della base A nella matrice di cambio di base (si può verificare facilmente che la matrice ottenuta la stessa che si ottiene cercando i coefficienti della base A in funzione della base canonica):

$$T_A^{\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Considerando invece il secondo caso $T^C_{\mathcal{E}_3}$ (passaggio da base canonica $\mathcal{E}_3$ a base C) basta calcolare la matrice $T^{\mathcal{E}_3}_C$ e calcolarne l'inversa $(C^{\mathcal{E}_3})^{-1}$:

$$T^C_{\mathcal{E}_3} = (T^{\mathcal{E}_3}_C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3/7 & -7/2 & 3 \end{pmatrix}$$

Data dunque la formula per le matrici di cambiamento di base (da teoria), possiamo trovare la formula nei casi visti nei punti in precedenza:

$$M^B_A(f) = T^B_{\mathcal{E}_2} M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}_4}(f) T^{\mathcal{E}_4}_A = Id_2 M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}_4}(f) T^{\mathcal{E}_4}_A = M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}_4}(f) T^{\mathcal{E}_4}_A$$

$$M^B_A(f) = F' = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$M^C_B(g) = T^C_{\mathcal{E}_3} M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_2}(g) T^{\mathcal{E}_2}_B = T^C_{\mathcal{E}_3} M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_2}(g) Id_2 = T^C_{\mathcal{E}_3} M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_2}(g)$$

$$M^C_B(g) = G' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

I risultati ottenuti ora coincidono con quelli già calcolati in precedenza.

(2) (a) Per trovare una base per lo spazio delle colonne di A sfruttando il fatto che le operazioni elementari sulle righe di una matrice non alterano lo spazio delle righe della matrice in considerazione, possiamo lavorare con la matrice A^T invece che con la matrice A direttamente. I casi possibili sono due: o le quattro righe di A^T sono tra di loro linearmente indipendenti, oppure vi è tra di loro qualche relazione di dipendenza lineare. Nella nostra soluzione ricaveremo anche queste eventuali relazioni di dipendenza lineare.
Scriviamo la matrice I_4 a destra di A^T e portiamo A^T in forma a scala:

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 11 & -5 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{III+I \\ IV-2\cdot I}]{II-3\cdot I} \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -11 & -11 & -11 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 5 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{11}II} \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -3/11 & 1/11 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 5 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[IV-3\cdot II]{III+5\cdot I} \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -3/11 & 1/11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4/11 & 5/11 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12/11 & -3/11 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Otteniamo una forma a scala per A^T dopo aver scambiato tra di loro le ultime due righe, ma vediamo già da questo passaggio che $\mathrm{rg}(A^T) = 3$ e che

$$\frac{4}{11}v_1 - \frac{5}{11}v_2 - v_3 = 0$$

dove abbiamo indicato con $v_1, \dots, v_4$ le quattro righe di A^T. Dunque una possibile base per lo spazio delle colonne di A può essere data da $\langle (v_1^T; v_2^T; v_4^T) \rangle$.

(b) Per trovare una base di $\mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0})$ possiamo prendere A nella forma a scala precedentemente calcolata:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 11 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Notiamo subito che in questo caso abbiamo 4 incognite e che la nostra matrice A ha rango 3. La dimensione dello spazio delle soluzioni è $4 - 3 = 1$.
Risolvendo il sistema otteniamo che:

$$\mathrm{Sol}(\mathbb{A}, 0) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Chiamiamo A' la matrice $(A|b)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & -5 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Lavorando sempre col metodo di Gauss riportiamo la matrice in una forma a scala (dobbiamo solo controllare cosa succede al vettore dei termini noti):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Questa matrice A' ha rango 4 e quindi $\mathrm{rg}(A') \neq \mathrm{rg}(A)$, il sistema è incompatibile e non ammette soluzioni ($\mathrm{Sol}(A|b) = \emptyset$).
Ora chiamiamo A'' la matrice $(A|c)$. In questo caso il sistema ridotto diventa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 11 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Poiché A'' ha rango 3 ($\mathrm{rg}(A'') = \mathrm{rg}(A)$), il sistema è compatibile e ha come soluzione:

$$\mathrm{Sol}(A,c) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{11}(4\alpha+26) \\ \frac{1}{11}(5\alpha-6) \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbf{R} \right\}.$$

Scegliendo $\alpha = 7/4$ si ottiene:

$$\mathrm{Sol}(A,c) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1/4 \\ 7/4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

e dunque

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1/4 \\ 7/4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(3) Si calcola che $f(1) = \frac{1+1}{2} = 1$, $f(x) = \frac{x+(-x)}{2} = 0$, $f(x^2) = \frac{x^2+(-x)^2}{2} = x^2$, $f(x^3) = \frac{x^3-x^3}{2} = 0$. Quindi la matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha ovviamente rango 2. Poiché i polinomi 1 e x^2 generano l'immagine (sono le immagini dei vettori di una base dello spazio di partenza) e sono linearmente indipendenti, essi formano una base dell'immagine. Dal teorema del rango segue che il nucleo ha dimensione $\dim \mathbf{R}[x])_{\leq 3} - \dim \mathrm{im}(f) = 4 - 2 = 2$. I polinomi x, x^3 sono nel nucleo e sono linearmente indipendenti, quindi formano una base per $\ker(f)$.