10. Didattica integrativa 5

(1) Sia $d \in \mathbf{N}$. Sia $\psi : \mathbf{R}[x]_{\leq d} \to \mathbf{R}$ la funzione lineare $p(x) \mapsto \int_0^1 p(x)dx$
  (a) Si dimostri che ψ è suriettiva.
  (b) Si determini la dimensione del nucleo di ψ.
  (c) Si determini una base del nucleo di ψ.

(2) Sia $\mathrm{tr} : M_{2\times 2}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ la funzione lineare che manda una matrice M alla sua traccia. Si determini la matrice di tr rispetto alla base canonica di $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ e $\mathbf{R}$.

(3) Per le seguenti tre funzioni lineari
  - Si determinino le dimensioni del nucleo e dell'immagine.
  - Si dica se la funzione è iniettiva, suriettiva o biiettiva.
  - Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine.

  (a) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, (x, y, z) \mapsto (12x - 3y, x + 2y + z, 5x + y + z)$,
  (b) $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4, (x, y, z) \mapsto (-y + 7z, 4x - y + z, -2x + y + z, x - 5z)$,
  (c) $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_{>0}, x \mapsto 2^x$.

(4) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^n$ una funzione lineare e siano $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^2$ linearmente indipendenti. Si dimostri che vale una delle tre seguenti affermazioni.
  (a) $f(v_1), f(v_2)$ sono linearmente indipendenti,
  (b) $f(\mathbf{R}^2) = 0$,
  (c) $\dim f(\mathbf{R}^2) = 1$.

(5) Sia d un intero. Prendiamo $d + 1$ numeri distinti $t_1, \ldots, t_{d+1} \in \mathbf{R}$. Definiamo per $i = 0, \ldots, d$ i polinomi

$$p_0 = 1, p_1 = (x - t_1), p_2 = (x - t_2)(x - t_1), \ldots, p_d(x) = \prod_{i=1}^{d}(x - t_i),$$

quindi $p_i = (x - t_i)p_{i-1}$. Sia $f : \mathbf{R}[x]_{\leq d} \to \mathbf{R}^{d+1}$ la funzione lineare definita da $f(p) = (p(t_1), p(t_2), \ldots, p(t_{d+1}))$. (In particolare, il numero t_{d+1} serve solamente per definire la funzione f e non occorre per definire i polinomi p_i.)
  (a) Siano $q_1, \ldots, q_s \in \mathbf{R}[x]_{\leq d}$ polinomi tali che per ogni $i = 2, 3, \ldots, s$ abbiamo $\deg(q_i) > \deg(q_{i-1})$. Si dimostri che $\{q_1, \ldots, q_s\}$ sono linearmente indipendenti. Si deduca che $B = (p_0, \ldots, p_d)$ è una base di $\mathbf{R}[x]_{\leq d}$.
  (b) Sia $A := M^{\mathcal{E}}_B(f)$ la matrice associata ad f. Si dimostri per $i = 1, \ldots, d$ e $j = i + 1, \ldots, d + 1$ che $a_{ij} = 0$. Inoltre si dimostri che $a_{ii} \neq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, d + 1$.
  (c) Si dimostri che $\mathrm{rg}(A) = d + 1$ e che f è un isomorfismo.