Soluzioni Tutorato 6

(1) Si calcoli, se possibile, il determinante delle seguente matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \; A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \; A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: La matrice A_1 è una matrice 2×2. Usiamo il Lemma 6.2 per calcolare il suo determinante. Troviamo che

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = -1.$$

Non è possibile calcolare il determinante della matrice A_2 poichè il determinante è definito solo per le matrici quadrate.

La matrice A_3 è una matrice 2×2. Otteniamo

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 5 - 0 \cdot 0 = -5.$$

Il determinante di A_4 si può calcolare usando operazioni sulle righe:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Nella prima uguaglianze usiamo il fatto che quando si somma un multiplo di una riga su un'altra, allora il determinante è invariato. In questo caso abbiamo sommato -4 volta la prima riga alla seconda e -7 volte la prima riga alla terza. Similmente per la seconda uguaglianza. La terza matrice ha una riga con solo zeri, quindi il suo determinante è zero.

(2) Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 8 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Si determinino $\det(A), \det(B), \det(AB), \det(B^{-1}A)$.

Soluzione: Calcoliamo $\det(A)$ usando le operazioni elementari sulle righe:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = 12.$$

Infatti, nel secondo passaggio abbiamo sottratto dalla seconda riga il doppio della prima, nel terzo passaggio abbiamo sottratto il triplo della seconda riga dalla terza riga. Nessuna di queste operazioni modifica il determinante.

Per $\det(B)$ usiamo

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 8 & 3 & -1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & -9 & -19 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -38 \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -38 \end{pmatrix} = (-1)(2)(1)(-38) = 72. \end{aligned}$$

Infatti nel primo passaggio abbiamo sottratto dalla terza riga il quadruplo della seconda, nel terzo passaggio abbiamo sommato alla terza il triplo della seconda, e queste operazioni non alterano il determinante. Invece nel passaggio successivo abbiamo scambiato tra di loro due righe (la prima e la seconda), e questa operazione cambia il segno del determinante.

Il teorema di Binet implica che $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 12 \cdot 72 = 864$ e

$$\det(B^{-1}A) = \det(B^{-1})\det(A) = \frac{\det(A)}{\det(B)} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}.$$

(3) Si calcoli il determinante delle matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) usando lo sviluppo di Laplace (secondo una colonna o una riga a scelta);
(b) usando operazioni elementare sulle righe.

Soluzione: Iniziamo calcolando il determinante della matrice data usando la regola di Laplace e sviluppando il determinante secondo la seconda riga (è quella con il maggior numero di zeri). Abbiamo quindi:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Procediamo quindi sviluppando i due determinanti 3×3 secondo la regola di Laplace: Utilizzeremo la seconda colonna per entrambi i determinanti:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4(-2(2 \cdot 4 - 1 \cdot 1) - 2(1 \cdot 4 + 1 \cdot 1)) - (-1(1 \cdot 4 + 1 \cdot 1) - 1(1 \cdot 1 + 1 \cdot 2)) =$$

$$= 4 \cdot (-14 - 10) - (-5 - 3) = -96 + 8 = -88.$$

Vediamo ora con le operazioni elementari sulle righe:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 4 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 4 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -6 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 5\end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -23 & 12\\ 0 & -1 & -6 & 3\\ 0 & 0 & -8 & 8\end{pmatrix}\\
&= 8\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -23 & 12\\ 0 & -1 & -6 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\\
&= 8\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -11\\ 0 & -1 & -6 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\\
&= -8\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -11\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -6 & 3\end{pmatrix}\\
&= 8\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -6 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -11\end{pmatrix} = 8(-1)(-1)(-11) = -88,
\end{aligned}$$

in accordo con quanto trovato in precedenza.

(4) Sia

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 7\end{pmatrix}.$$

(a) Si determini $\mathrm{cof}(A)$.

(b) Si usi la prima parte per calcolare A^{-1}.

Soluzione: La matrice $\mathrm{cof}(A)$ ha al posto (i, j) il coefficiente $(-1)^{i+j}\det(A^{(i,j)})$. Quindi al posto $(2, 3)$ troviamo

$$(-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix} = (-1)(5-2) = -3.$$

Similmente troviamo gli altri coefficienti. Il risultato è quindi che

$$\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix}1 & -10 & 7\\ 1 & 4 & -3\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\det(A) = 2$. Quindi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{cof}(A)^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -10 & 4 & 2\\ 7 & -3 & -1\end{pmatrix}.$$