Supporto alla didattica 5 - 16-20/11/2019 - Soluzioni

Esercizio 1

(a) Dimostrare che f è suriettiva equivale a dimostrare che $\mathrm{im}(f) = \mathbf{R}$. Notiamo che l'immagine è contenuta in $\mathbf{R}$, quindi ha dimensione 0 e $\mathrm{im}(f) = \{0\}$ oppure ha dimensione 1 e $\mathrm{im}(f) = \mathbf{R}$.
Osserviamo che
$$\psi(1) = \int_0^1 dx = 1 \neq 0,$$
quindi $\mathrm{im}(f)$ contiene un elemento diverso da 0 e quindi è tutto $\mathbf{R}$.

(b) Dal Teorema del rango segue che $\dim \ker(f) = \dim \mathbf{R}[x]_{\leq d} - \dim \mathrm{im}(f) = (d+1) - 1 = d$.

(c) Sia $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{d-1}x^{d-1} + a_d x^d \in \mathbf{R}\,[x]_{\leq d}$. Allora
$$\psi(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_{d-1}}{d} + \frac{a_d}{d+1}.$$
Quindi $p(x) \in \ker(f)$ se e solo se i suoi coefficienti soddisfano l'equazione
$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_{d-1}}{d} + \frac{a_d}{d+1} = 0$$
il cui insieme delle soluzioni si può scrivere come
$$\left\{ \begin{pmatrix} -(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_d}{d+1}) \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_{d-1} \\ a_d \end{pmatrix} \middle| a_1, a_2, \ldots, a_d \in \mathbf{R} \right\} = \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ d+1 \end{pmatrix} \right\}$$
Dunque l'insieme $B = \{-1 + 2x, -1 + 3x^2, \ldots, -1 + (d+1)x^d\}$ è un sistema di generatori per $\ker(f)$ composto da d polinomi. Sapendo dal punto (b) che la dimensione del $\ker(f)$ è pari a d, possiamo concludere che B è una base di $\ker(f)$.

Esercizio 2

Abbiamo che
$$\left\{ e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
è una base ordinata di $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ e che $\{1\}$ è una base di $\mathbf{R}$. La funzione $\mathrm{tr}\colon M_{2\times 2}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ è così definita $(a_{ij})_{i,j} \mapsto a_{11} + a_{22}$. Quindi $\mathrm{tr}(e_{11}) = \mathrm{tr}(e_{22}) = 1$ e $\mathrm{tr}(e_{12}) = \mathrm{tr}(e_{21}) = 0$. La matrice associate a tr nelle basi canoniche è
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

(a)

La matrice di $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ nelle basi canoniche di dominio e codominio è:

$$F = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ricordando che $\dim(\operatorname{im} f) = \operatorname{rk} F$, e che il rango è invariante per operazioni elementari sulle matrici, riduciamo in forma a scala F:

$$F' = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 0 \\ 0 & 9/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il numero dei pivots di F' corrisponde al rango: $\operatorname{rk}(F') = 2 = \dim(\operatorname{im} f)$ Dalla formula delle dimensioni otteniamo: $\dim(\ker f) = \dim(\mathbf{R}^3) - \dim(\operatorname{im} f) = 3 - 2 = 1$. Pertanto la funzione non è né iniettiva, né suriettiva. Per determinare una base di $\operatorname{im} f$ è sufficiente selezionare le colonne della matrice F corrispondenti ai pivots di F':

$$B_{\operatorname{im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per ricavare $\ker f$ dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato $(F \mid \underline{0})$, equivalente a $(F' \mid \underline{0})$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 9/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Selezionando un vettore non nullo in $\operatorname{Sol}(F \mid \underline{0})$ ricaviamo una base per $\ker f$, ad esempio:

$$B_{\ker f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} \right\}.$$

Alternativamente, noto che $\dim(\ker f) = 1$, è sufficiente esibire un vettore non nullo di $\mathbf{R}^3$ che scontrato contro F dia zero.

(b)

La matrice di $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ nelle basi canoniche di dominio e codominio è:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il nucleo risolvendo $(G \mid \underline{0})$ con la riduzione di Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ne segue che $\ker g = \{\underline{0}\}$, equivalentemente $\dim(\ker g) = 0$, equivalentemente g è iniettiva. Per la formula delle dimensioni, $\dim(\operatorname{im} g) = \dim \mathbf{R}^3 - \dim(\ker g) = 3 - 0 = 3$. Ne consegue che g non è suriettiva (perché $\operatorname{im} g \subsetneq \mathbf{R}^4$) e che una base per $\operatorname{im} g$ è data dalle colonne della matrice G.

(c)

Ricordiamo che la somma vettoriale del codominio corrisponde all'usuale prodotto in $\mathbf{R}_{>0}$ ed il vettore nullo di $\mathbf{R}_{>0}$ è 1. Abbiamo $h(x) = \underline{0}_{\mathbf{R}_{>0}}$ se e solo se $h(x) = 1$ se e solo se $2^x = 1$, che ha come unica soluzione $x = 0$. Quindi $\ker h = \{\underline{0}\}$ e h è iniettiva. Per la formula delle dimensioni, $\dim(\operatorname{im}(h)) = \dim \mathbf{R} - 0 = 1$, quindi $\dim(\operatorname{im}(h)) = \dim \mathbf{R}_{>0}$ e h è suriettiva; in particolare h è biiettiva. Una base per l'immagine è data da un vettore non nullo di $\mathbf{R}_{>0}$, ad esempio 2.

Esercizio 4

Procederemo nel modo seguente:

1. (a) falsa implica una sola a tra (b) e (c) vere;
2. (a) vera implica sia (b) sia (c) false.

1. Supponiamo che (a) sia falsa. Allora $\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) = 0$ per opportuni $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ non entrambi nulli. Per linearità, $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = 0$, cioè $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ è un vettore non nullo (il testo ci dice che v_1, v_2 sono linearmente indipendenti) in $\ker f$, quindi $\dim(\ker f) \geq 1$ (equivalentemente f non è iniettiva). Per il Teorema delle dimensioni: $\dim(\operatorname{im} f) = \dim \mathbf{R}^2 - \dim \ker f \leq 2 - 1 = 1$. Quindi vi sono due possibilità che si escludono a vicenda:

- $\dim(\operatorname{im} f) = 0 \Leftrightarrow f(\mathbf{R}^2) = 0$;
- $\dim(\operatorname{im} f) = 1$.

2. Supponiamo ora che (a) sia vera. Allora $\dim(\operatorname{span}\{f(v_1), f(v_2)\}) = (\dim \operatorname{im}(f)) = \dim(f(\mathbf{R}^2)) = 2$, che esclude le altre possibilità.

Esercizio 5

(a)

Se $p(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ è un polinomio, allora il suo grado è definito da

$$\deg(p) := \max\{i \mid a_i \neq 0\}.$$

In altre parole, $\deg(p)$ è l'esponente massimo di x che compare in p. Valgono le seguenti proprietà di facile verifica:

- $\deg(p+q) \leq \max\{\deg(p), \deg(q)\}$;
- $\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$;
- $\deg(\lambda p) = \deg(p)$ per ogni $0 \neq \lambda \in \mathbf{R}$.

(Notiamo che il grado del polinomio nullo non è ben definito. Spesso si pone per convezione $\deg(0) := -\infty$. In questo modo le proprietà elencate sopra hanno senso anche se uno tra p e q è nullo).

Presentiamo ora due diverse soluzioni per il punto (a).

Soluzione 1. Scriviamo i q_i nella forma $q_i(x) = c_{0i} + c_{1i}x + \cdots + c_{di}x^d$. Possiamo considerare ogni q_i come un vettore colonna $(d+1)$-dimensionale $(c_{0i}, \ldots, c_{di})^T$. Quindi la matrice $C := (c_{ji})_{j=0,\ldots,d, i=1,\ldots,s}$ ha come colonne i vettori relativi ai q_i, e per dimostrare che questi ultimi sono linearmente indipendenti basta far vedere che C ha una forma a scala senza colonne nulle.

Sia $k_i := \deg(q_i)$: allora, per definizione di grado, abbiamo che $c_{k_i,i} \neq 0$ e $c_{j,i} = 0$ per ogni $j > k_i$. Ma ciò significa che C è già in forma a scala, e nessuna delle sue colonne è nulla poiché i q_i sono non nulli.

Soluzione 2. Procediamo per induzione su s.

Passo base ($s = 1$): dobbiamo mostrare che $\{q_1\}$ è un insieme linearmente indipendente, ma ciò è banalmente vero.

Passo induttivo ($s > 1$): supponiamo che $\deg(q_i) > \deg(q_{i-1})$ per ogni $i = 2, \ldots, s-1$ e che $\{q_1, \ldots, q_{s-1}\}$ sono linearmente indipendenti. Dobbiamo mostrare che se $\deg(q_s) > \deg(q_{s-1})$ allora anche $\{q_1, \ldots, q_s\}$ sono linearmente indipendenti. Quindi basta far vedere che se $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i q_i = 0$ allora $\lambda_i = 0$ per ogni i. Sia $n := \deg(q_s)$: allora, poiché $n > \deg(q_i)$ per ogni $i < s$, il coefficiente di grado n del polinomio $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i q_i$ è uguale a $a_n \lambda_s$, dove a_n è il coefficiente di grado n di q_s (notiamo che $a_n \neq 0$ per definizione di grado). Poiché il polinomio $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i q_i$ è nullo allora tutti i suoi coefficienti sono nulli. Quindi in particolare abbiamo che $a_n \lambda_s = 0$: ma, dato che $a_n \neq 0$, questo implica che $\lambda_s = 0$. Perciò abbiamo che $\sum_{i=1}^{s-1} \lambda_i q_i = 0$ e quindi, siccome $\{q_1, \ldots, q_{s-1}\}$ sono linearmente indipendenti, $\lambda_i = 0$ anche per $i = 1, \ldots, n$. Ciò dimostra che $\{q_1, \ldots, q_s\}$ sono linearmente indipendenti.

Per finire, ci manca da dimostrare che $B = \{p_0, \ldots, p_d\}$ è una base di $\mathbf{R}[x]_{\leq d}$. Notiamo innanzitutto che $\deg(p_i) = i$: quindi, per ciò che abbiamo appena mostrato, i p_i sono linearmente indipendenti. Essi sono anche una base perché sono $d+1$, che sappiamo essere la dimensione di $\mathbf{R}[x]_{\leq d}$.

(b)

A è la matrice che ha come j-esima colonna i coefficienti di $f(p_{j-1})$ nella base canonica di $\mathbf{R}^{d+1}$ (attenzione agli indici! I p_i sono indicizzati da $0, \ldots, d$, ma noi considereremo p_i come l'$(i+1)$-esimo elemento della base B). Quindi $a_{ij} = p_{j-1}(t_i)$. Abbiamo che $p_{j-1} = \prod_{k=1}^{j-1}(x - t_k)$, perciò

$$a_{ij} = p_{j-1}(t_i) = \prod_{k=1}^{j-1}(t_i - t_k).$$

Ricordiamo che i t_i sono distinti, quindi $t_i - t_k = 0$ se e solo se $i = k$. Ne deduciamo che

$$a_{ij} \begin{cases} = 0 & \text{se } i \leq j-1, \\ \neq 0 & \text{se } i > j-1. \end{cases}$$

e da ciò la tesi segue facilmente.

(c)

Entrambe le tesi seguono se dimostriamo che A è invertibile. Possiamo notare che il punto (b) ci dice che A è una matrice triangolare inferiore. Ma allora, poiché $a_{11} \cdots a_{d+1,d+1} \neq 0$, il fatto che A sia invertibile segue dall'Esercizio 2 del secondo foglio di esercizi (in realtà l'esercizio considerava le matrici triangolari superiori e non quelle inferiori, ma si può ottenere un risultato analogo per le matrici triangolari inferiori semplicemente sostituendo la matrice con la sua trasposta).