12. Didattica integrativa 6

(1) Siano $x, y \in K^n = M_{n\times 1}(K)$.
  (a) Si determini la matrice $x \cdot y^T$.
  (b) Si dimostri che $\det(x \cdot y^T) = 0$.
(2) Si dimostri che
$$\det\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{pmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq 4} (a_j - a_i)$$
(3) Siano
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Si determini $\mathrm{Sol}(A, b)$ sia con la regola di Cramer, sia con il procedimento di Gauß.
(4) Data $A \in M_{n,n}(K)$ e $\lambda \in K$ un suo autovalore, denotiamo con $E_\lambda(A)$ l'autospazio relativo all'autovalore λ della matrice A.
  (a) Mostrare che per ogni intero positivo m si ha che A^m ammette λ^m come autovalore.
  (b) Mostrare che $E_{\lambda^m}(A^m) \supset E_{\lambda_1}(A) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_t}(A)$, dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ sono gli autovalori di A tali che $\lambda_i^m = \lambda^m$. Mostrare con un esempio che questa inclusione può essere stretta.
  (c) Se $\mu \in K$ è un autovalore per la matrice A^m e $\lambda \in K$ è tale che $\lambda^m = \mu$, è vero che λ è un autovalore per A?