13. Tutorato 7

(1) Siano

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si determinino tutti gli autovalori e autovettori di A_1 e di A_2. La matrice A_1 è diagonalizzabile? La matrice A_2 è diagonalizzabile?

(2) Per ciascuna delle seguenti matrici determinare una forma diagonale o una forma di Jordan. Determinare inoltre la matrice Q del cambiamento di base.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) (Esercizio da esame) Sia data la matrice al variare di $h \in \mathbf{R}$:

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Al variare di h dire se la matrice sia diagonalizzabile o meno.
(b) Trovare ogni valore $\overline{h}$ per cui $A_{\overline{h}}$ ha almeno un autovalore con molteplicità algebrica maggiore di uno.
(c) Per $h = 3$ trovare una matrice P tale che $P^{-1}A_3P$ sia diagonale.
(d) Per gli $\overline{h}$ del punto (b) mostrare che $(A_{\overline{h}})^3 = 0$. È per tali $\overline{h}$, $A_{\overline{h}}$ simile a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

(4) Si consideri la seguente matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Sapendo che il polinomio caratteristico di B è $p_B(t) = (1-t)^4$, determinare una matrice J in forma canonica di Jordan ed una matrice invertibile M tale che $J = M^{-1}BM$.