Soluzioni Tutorato 7

(1) Siano

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si determinino tutti gli autovalori e autovettori di A_1 e di A_2. La matrice A_1 è diagonalizzabile? La matrice A_2 è diagonalizzabile?

Soluzione: Per A_1 abbiamo che il polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 3-t & 2 & -2 \\ -1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & -t \end{pmatrix} &= (3-t)\det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -t\det \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & -t \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (3-t)(t^2-1) - 2(t-1) - 2(t-1) = (t-1)((3-t)(t+1)-2-2) \\ &= (1-t)(-t^2+2t-1) = (t-1)(t-1)^2 = (t-1)^3. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo 1 come unico autovalore, e $m_a(1) = 3$. La matrice $A_1 - I_3$ non è la matrice 0, quindi il suo rango è almeno 1 e $m_g(1) \leq 3 - 1 = 2$. Quindi la matrice non è diagonalizzabile. Esplicitamente, la matrice $A_1 - I_3$ è

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

che ha rango 1 e così una base per l'autospazio E_1 è data da $\{(1,-1,0)^T, (0,1,1,)^T\}$ (è ora anche chiaro che $m_g(1) = 2$).

Per A_2 abbiamo che il polinomio caratteristico è

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 4-t & 1 & -1 \\ 2 & 5-t & -2 \\ 1 & 1 & 2-t \end{pmatrix} &= (4-t)\det\begin{pmatrix} 5-t & -2 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix} - 1\det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix} - 1\det\begin{pmatrix} 2 & 5-t \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (4-t)((5-t)(2-t)+2) - 1(2(2-t)+2) - 1(2-(5-t)) \\ &= -(t-4)^2(t-3) + (t-3) = -(t-3)^2(t-5). \end{aligned}$$

Per l'autovalore 3 otteniamo che $A - 3I_3$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 1. Una base per l'autospazio è $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$.

Per l'autovalore 5 troviamo

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

In questo caso

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una forma a scala. Allora $(1,2,1)$ è una base per l'autospazio relativo all'autovalore 5.

Dal momento che la molteplicità lagebrica e quella geometrica coincidono per ogni autovalore, abbiamo che la matrice A_2 è diagonalizzabile.

(2) Per ciascuna delle seguenti matrici determinare una forma diagonale o una forma di Jordan. Determinare inoltre la matrice Q del cambiamento di base.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione: Abbiamo che il polinomio caratteristico di A_1 è

$$\det \begin{pmatrix} 2-t & 0 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t)^2.$$

Quindi l'unico autovalore è $\lambda = 2$, con molteplicità algebrica $m_a(2) = 2$. La matrice $A_1 - 2I_2$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

che è manifestamente una matrice di rango 1, e quindi la moltiplicità geometrica dell'autovalore 2 è 1. Quindi c'è un unico blocco di Jordan. Un autovettore è $(0,1)^T$. Come base possiamo prendere $B = \{(A_1 - 2I_2)(1,0) = (0,1), (1,0)\}$, ed abbiamo quindi che

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T_B^{\mathcal{E}_2}$$

è la matrice del cambio di base tale che

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = Q^{-1} \cdot A_1 \cdot Q.$$

Abbiamo che il polinomio caratteristico di A_2 è

$$\det(A_2 - tI_3) = (1-t)(2-t)^2.$$

Per l'autovalore 2 troviamo che

$$A_2 - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una matrice che ha rango 2. Il suo quadrato è

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi gli autovettori relativi all'autovalore 2 hanno $x_2 = x_3 = 0$, quelli generalizzati soddisfanno $x_2 = x_3$. Prendiamo $(0,1,1)^T$ come autovettore generalizzato, allora $(A_2 - 2I_3) \cdot (0,1,1)^T = (1,0,0)^T$ (ossia $A_2 \cdot (0,1,1)^T = (1,0,0)^T + 2(0,1,1)^T$).

Per l'autovalore 1 troviamo

$$A_2 - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Che è una matrice di rango 2. L'autospazio relativo all'autovalore 1 è descritto da $x_3 = x_1 - x_2 = 0$ e possiamo quindi prendere $(1,1,0)^T$ come autovettore.

Segue che rispetto alla base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

la matrice A_2 è in forma di Jordan

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e che posta Q la matrice le cui colonne sono i vettori della base B allora Q è la matrice del cambio di base tale che $J = Q^{-1} \cdot A_2 \cdot Q$.

(3) (Esercizio da esame) Sia data la matrice al variare di $h \in \mathbf{R}$:

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Al variare di h dire se la matrice sia diagonalizzabile o meno.
(b) Trovare ogni valore $\overline{h}$ per cui $A_{\overline{h}}$ ha almeno un autovalore con molteplicità algebrica maggiore di uno.
(c) Per $h = 3$ trovare una matrice P tale che $P^{-1}A_3P$ sia diagonale.
(d) Per gli $\overline{h}$ del punto (b) mostrare che $(A_{\overline{h}})^3 = 0$. È per tali $\overline{h}$, $A_{\overline{h}}$ simile a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Soluzione: (**a**) La matrice assegnata è:

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per studiare la diagonalizzabilità dobbiamo considerare il polinomio caratteristico associato alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 0-t & 1 & 0 \\ h & 0-t & 1 \\ 0 & 1 & 0-t \end{pmatrix}$$

Calcoliamo quindi il determinante tramite il metodo di Laplace (ad esempio lungo la prima riga) e otteniamo il polinomio:

$$P_t = -t(t^2 - 1 - h)$$

Considerando le soluzioni dell'equazione $P_t = 0$ possiamo distinguere 3 casi:

(a) per $h = -1$ abbiamo un'unica soluzione ($t = 0$) con molteplicità algebrica 3. In questo caso la diagonalizzabilità va quindi controllata.
(b) per $h > -1$ abbiamo tre soluzioni distinte ($t = 0, \sqrt{1+h}, -\sqrt{1+h}$) di molteplicità 1. La matrice è quindi diagonalizzabile sui reali (è importante specificare 'sui reali' in vista del prossimo punto).
(c) per $h < -1$ due delle soluzioni sono complesse, quindi la matrice non risulta diagonalizzabile sui reali. Considerandola come matrice a coefficienti complessi, invece, abbiamo ancora 3 soluzioni distinte di molteplicità algebrica 1. La matrice è quindi diagonalizzabile in questo caso sui complessi.

Rimane da verificare se A_h è diagonalizzabile nel caso $h = -1$:

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'autovalore 0 ha molteplicità algebrica 3, controlliamo la molteplicità geometrica:

$$E_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo subito che la prima e la terza riga sono uguali, quindi la matrice riduce a:

$$E_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che produce le condizioni

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Un vettore generico che soddisfi queste equazioni può essere scritto come:

$$V = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Lo spazio quindi ha dimensione 1 e di conseguenza la molteplicità geometrica di $t = 0$ è 1. Si deduce che la matrice non è diagonalizzabile in questo caso.

(**b**) Per quanto visto nel punto precedente, l'unico valore di h che ammette un autovalore di A_h con molteplicità algebrica maggiore di 1 è $h = -1$, nel qual caso $t = 0$ ha molteplicità 3.

(**c**) Da quanto visto sopra sappiamo che la matrice

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalizzabile ed ha autovalori $t = 0$, $t = -2$, $t = 2$. Chiamiamo D la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ora vogliamo trovare la matrice che opera la diagonalizzazione.

Per $t = 0$ osserviamo che

$$E_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui:

$$E_0 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

Per $t = 2$ osserviamo che

$$E_2 = \ker(A_3 - 2I_3) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

da cui:

$$E_2 = \text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Per $t = -2$ osserviamo che

$$E_{-2} = \ker(A_3 + 2I_3) = \ker\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\3 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix} \to ker\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

da cui:

$$E_{-2} = \text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right).$$

Quindi la matrice che diagonalizza A_3 è

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & -2\\-3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Osserviamo che l'ordine in cui inseriamo i vettori deve essere coerente con la scrittura della matrice diagonale D: il primo autovalore in D è 0, quindi la prima colonna di P deve corrispondere all'autospazio E_0; il secondo autovalore in D è 2, quindi la seconda colonna di P deve corrispondere all'autospazio E_2; infine il terzo autovalore in D è -2, quindi la terza colonna di P deve corrispondere all'autospazio E_{-2}.

(**d**) Abbiamo che

$$A_{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

quindi

$$A_{-1}^2 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\-1 & - & 1\end{pmatrix}, \qquad A_{-1}^3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Rimane da verificare se è simile alla matrice:

$$B = \left(\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\\hline 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Abbiamo sottolineato il fatto che la matrice B è una matrice di Jordan, con un blocco 2×2 con autovalore 0 ed un blocco 1×1 con autovalore 0.

Da ciò che abbiamo visto nel punto (a), la molteplicità geometrica di $t = 0$ nel caso $h = -1$ è 1. Questo ci assicura che A_{-1} è simile ad una matrice di Jordan che abbia la presenza di un solo blocco di Jordan con autovalore 0.

Quindi la matrice A_{-1} non può essere simile a B.

(4) Si consideri la seguente matrice

$$B = \begin{pmatrix}2 & 0 & -1 & 1\\1 & 1 & -1 & 1\\1 & -3 & 2 & -1\\0 & -3 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

Sapendo che il polinomio caratteristico di B è $p_B(t) = (1-t)^4$, determinare una matrice J in forma canonica di Jordan ed una matrice invertibile M tale che $J = M^{-1}BM$.

Soluzione: Dal momento che il polinomio caratteristico della matrice B è

$$P_t = (1-t)^4,$$

abbiamo quindi solamente $\lambda = 1$ come autovalore con molteplicità algebrica 4. Ora andiamo a calcolare la molteplicità geometrica: la matrice

$$B - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

può essere facilmente ridotta alla seguente forma a scala mediante l'uso di operazioni elementari sulle righe:

$$B - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\ker(B-I) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Questo ci assicura che la matrice non è diagonalizzabile e ci indica che saranno presenti due blocchi di Jordan con autovalore 1. A questo punto andiamo a calcolare $(B-I)^2$

$$(B-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

il cui nucleo è uno spazio di dimensione 3:

$$\ker(B-I)^2 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Infine $(B-I)^3 = 0$ e quindi l'ordine massimo di un blocco di Jordan è 3.

Siamo ora in grado di scrivere la matrice di Jordan:

$$J = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Determiniamo ora una matrice M tale che $J = M^{-1} \cdot B \cdot M$. Scegliamo un vettore della base canonica (la base canonica genera il nucleo di $(B-I)^3$), ad esempio

$$v_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Da questo possiamo ottenere gli altri vettori del cambio di base: calcoliamo

$$(B-I)v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$(B-I)^2 v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo ora tutti gli elementi per scrivere la matrice M:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

È quindi facile vedere che

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e verificare che

$$M^{-1} \cdot B \cdot M = J.$$