Supporto alla didattica 6 - 23-27/11/2020 - Soluzioni

Esercizio 1

Siano $x^T = (x_1, \dots, x_n)$ e $y^T = (y_1, \dots, y_n)$, allora otteniamo

$$A := x \cdot y^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix}$$

ovvero $a_{ij} = x_iy_j$. Se $x_i = 0$ per qualche $i \in \{1, \dots, n\}$ allora la riga i-esima di A ha solo zeri, e quindi $\det(A) = 0$. Se invece tutti gli x_i sono diversi da 0, moltiplicando la riga i-esima di A per $-\frac{x_k}{x_i}$ e sommandola alla k-esima otteniamo da A una matrice A' con riga k-esima di soli zeri; dalle proprietà del determinante segue che $\det(A) = \det(A') = 0$.

Esercizio 2

Dobbiamo calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{pmatrix}.$$

Siano ordinatamente v_1, v_2, v_3, v_4 i vettori colonna della matrice A ed usiamo la notazione compatta $A = (v_1\ v_2\ v_3\ v_4)$. Sappiamo che effettuando l'operazione elementare che sostituisce la colonna v_i con $v_i + \alpha v_j$ con $i \neq j$ e $\alpha \in K$, il determinante non cambia. Lasciamo invariata la prima colonna ed effettuiamo le sostituzioni seguenti:

$$v_2 \rightsquigarrow v_2 - a_1v_1; \qquad v_3 \rightsquigarrow v_3 - a_1v_2; \qquad v_4 \rightsquigarrow v_4 - a_1v_3.$$

Semplificando e raccogliendo, otteniamo la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2\,(a_2 - a_1) & a_2^2\,(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3\,(a_3 - a_1) & a_3^2\,(a_3 - a_1) \\ 1 & a_4 - a_1 & a_4\,(a_4 - a_1) & a_4^2\,(a_4 - a_1) \end{pmatrix}$$

con $\det A = \det A'$. Sviluppando la prima riga con la regola di Laplace, troviamo $\det A' = \det B$, con

$$B = \begin{pmatrix} a_2 - a_1 & a_2\,(a_2 - a_1) & a_2^2\,(a_2 - a_1) \\ a_3 - a_1 & a_3\,(a_3 - a_1) & a_3^2\,(a_3 - a_1) \\ a_4 - a_1 & a_4\,(a_4 - a_1) & a_4^2\,(a_4 - a_1) \end{pmatrix}.$$

Osserviamo ora che ciascuna riga di B è multipla di uno stesso scalare: dalla prima riga possiamo "raccogliere" lo scalare $(a_2 - a_1)$, dalla seconda $(a_3 - a_1)$ e dalla terza

$(a_4 - a_1)$. Dalla proprietà di multilinearità del determinante possiamo dedurre allora che $\det B = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1) \det B'$, dove

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \\ 1 & a_4 & a_4^2 \end{pmatrix}.$$

Si noti che B' ha una struttura analoga alla matrice di partenza A. Imitiamo il procedimento iniziale: se w_1, w_2, w_3 sono ordinatamente i vettori colonna di B', lasciamo invariata la colonna w_1 ed effettuiamo le sostituzioni:

$$w_2 \rightsquigarrow w_2 - a_2 w_1; \qquad w_3 \rightsquigarrow w_3 - a_2 w_2.$$

Semplificando e raccogliendo troviamo la matrice

$$B'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 - a_2 & a_3 (a_3 - a_2) \\ 1 & a_4 - a_2 & a_4 (a_4 - a_2) \end{pmatrix},$$

con $\det B' = \det B''$. Sviluppiamo secondo la prima riga grazie alla regola di Laplace: abbiamo $\det B'' = \det C$, con

$$C = \begin{pmatrix} a_3 - a_2 & a_3 (a_3 - a_2) \\ a_4 - a_2 & a_4 (a_4 - a_2) \end{pmatrix}.$$

Ancora una volta entrambe le righe della matrice sono multiple di uno stesso scalare. Come prima, la multilinearità permette di semplificare il calcolo del determinante: $\det C = (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \det C'$, dove

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & a_3 \\ 1 & a_4 \end{pmatrix}.$$

A questo punto basta ripercorrere la catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned} \det A = \det B &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1) \det B' = \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1) \det C = \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \det C' = \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_3 - a_4) = \\ &= \prod_{1 \leq i, j \leq 4} (a_i - a_j). \end{aligned}$$

Esercizio 3

Per prima cosa risolviamo il sistema con il metodo di Gauss; questo ci darà modo di vedere se A è invertibile, e dunque di capire se davvero possiamo applicare il metodo di Cramer.

Riduciamo a scala la matrice $(A|b)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Osserviamo che la forma a scala di A ha tre pivot, quindi A è invertibile e possiamo applicare Cramer. Prima però finiamo di risolvere il sistema: abbiamo $x_3 = 0$, $3x_2 = 2$ cioè $x = \frac{2}{3}$ e $x_1 = 1 - 2x_2 = -\frac{1}{3}$, da cui segue che

$$Sol(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Verifichiamo il risultato ottenuto risolvendo il sistema con il metodo di Cramer. Il determinante di A può essere calcolato dalla sua forma a scala (che abbiamo già trovato) moltiplicando gli elementi sulla diagonale: $\det(A) = 9$. Adesso dobbiamo calcolare i determinanti delle matrici B_i ottenute da A sostituendo alla colonna A_i il vettore b; abbiamo:

$$\det(B_1) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -3$$

$$\det(B_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 6$$

$$\det(B_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Di conseguenza la soluzione è data da $x_1 = \frac{\det(B_1)}{\det(A)} = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{\det(B_2)}{\det(A)} = \frac{2}{3}$ e $x_3 = \frac{\det(B_3)}{\det(A)} = 0$, la stessa trovata in precedenza.

Esercizio 4

Per $A \in M_{n\times n}(K)$ e λ un suo autovalore, abbiamo $E_\lambda(A) = \{v \in K^n \mid Av = \lambda v\} \neq \{0\}$.

(a)

Sia $m \in \mathbf{N}$. Per mostrare che λ^m è autovalore di A^m è sufficiente esibire $0 \neq v \in K^n$ per cui $A^m v = \lambda^m v$. Affermiamo che se $v \in E_\lambda(A)$ allora $v \in E_{\lambda^m}(A^m)$: infatti

$$A^m v = A^{m-1}Av = A^{m-1}\lambda v = \lambda A^{m-1} v = \cdots \lambda^m v.$$

Siccome $E_\lambda(A) \neq \{0\}$, scegliendo $v \neq 0$ si prova l'affermazione.

(b)

Siano $\lambda_i, i = 1, \ldots, t$ gli autovalori (distinti) di A tali che $\lambda_i^m = \lambda^m$, per ogni $i = 1, \ldots, t$. Mostriamo che $v \in E_{\lambda_i}(A)$ implica $v \in E_{\lambda^m}(A^m)$:

$$A^m v = A^{m-1}(Av) = A^{m-1}\lambda_i v = \lambda_i A^{m-1} v = \lambda_i A^{m-2}(Av) = \cdots = \lambda_i^m v = \lambda^m v.$$

Inoltre autospazi relativi ad autovalori distinti sono in somma diretta, pertanto $\bigoplus_{i=1}^t E_{\lambda_i}(A) \subset E_{\lambda^m}(A^m)$.

Come controesempio, possiamo considerare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si verifica che A ed A^2 hanno come unico autovalore 0 e

$$E_0(A) = \mathrm{span}\{e_1\} \subsetneq E_0(A^2) = K^2.$$

(c)

No, come controesempio possiamo prendere $m = 2$ ed $A = \mathbf{1}$, la matrice dell'identità. Allora $A^2 = \mathbf{1}$ e l'unico autovalore di A^2 è 1. Osserviamo però che $(-1)^2 = 1$, ma -1 non è autovalore di A.