14. Didattica integrativa 7

(1) Si considerino le seguenti matrici a valori reali:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare gli autovalori e autospazi di B e C. Dire se rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse.
(b) Al variare di a in $\mathbf{R}$ si determino autovalori e autospazi di A. Per quali valori di a la matrice è diagonalizzabile.
(c) Determinare i valori del parametro a per cui A è simile a C e trovare una matrice invertibile H tale che $C = H^{-1}AH$.
(d) Per quali valori del parametro A è simile a B?

(2) Si consideri un endomorfismo di $\mathbf{R}^n$, φ tale che

$$(\varphi - 3id_{\mathbf{R}^n}) \circ (\varphi - 2id_{\mathbf{R}^n}) = 0$$

(a) Sia λ un autovalore di φ. Mostrare che λ è 2 o 3.
(b) Siano $V_2 = \ker(\varphi - 2id)$, e $V_3 = \ker(\varphi - 3id)$. Sia v un vettore qualsiasi in $\mathbf{R}^n$, mostrare che $\varphi(v) - 2v$ è un vettore in V_3, e che $\varphi(v) - 3v$ è un vettore in V_2.
(c) Mostrare che φ è diagonalizzabile.

(3) Per ciascuna delle seguenti matrici determinare una forma diagonale o una forma di Jordan. Determinare inoltre la matrice Q del cambiamento di base.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$