15. Tutorato 8

(1) Data la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

si determini la relativa forma bilineare, si calcoli il rango e si individui se sia degenere, simmetrica o nessuna delle due. In caso sia degenere, determinare i vettori isotropi.

(2) Data la forma bilineare simmetrica su $\mathbf{R}^3$

$$g(v,w) = v_1w_1 + 2v_2w_2 + 3v_3w_3 - 4v_2w_3 - 4v_3w_2 + v_2w_1 + v_1w_2$$

e la base di $\mathbf{R}^3$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$

scrivere:

(a) la matrice S che rappresenta g rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di R^3,
(b) la matrice S' che rappresenta g rispetto alla base B,
(c) la matrice $T_B^{\mathcal{E}}$ di cambiamento di base da B a $\mathcal{E}$.
(d) Verificare infine che $S' = (T_B^{\mathcal{E}})^T S T_B^{\mathcal{E}}$.

(3) (a) Si dimostri che

$$p \cdot q = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \ldots + p(n)q(n)$$

è un forma bilineare simmetrica su $\mathbf{R}[x]_{\leq n}$.

(b) Sia $f_k = \prod_{i \in \{0,1,2,\ldots,n\} \setminus \{k\}} (x - i)$. (Per esempio, se $n = 4$ e $k = 2$ allora $f_2 = x(x-1)(x-3)(x-4)$.) Si dimostri che $\mathcal{B} = \{f_0, \ldots, f_n\}$ è una base di $\mathbf{R}[x]_{\leq n}$.

(c) Si calcola la matrice delle forme bilineare di (i) rispetto alla base $\mathcal{B}$ e si dimostri che la forma bilineare è un prodotto scalare.

(4) Sia $v \in \text{span}\{(1,1,2)\}$. Verificare che le condizioni $L(2,1,0) = (2,1,2)$, $L(1,-1,0) = (1,-1,4)$ ed $L(0,0,1) = v$ individuano un endomorfismo L_v di $\mathbf{R}^3$ e scriverne la matrice A_v rispetto alla base canonica.

(a) Per ogni $v \in \text{span}\{(1,1,2)\}$, stabilire se l'endomorfismo L_v sia diagonalizzabile, determinandone una base di autovettori. Altrimenti, scrivere una matrice di Jordan simile ad A_v.
(b) Gli endomorfismi L_v ammettono autovettori comuni?
(c) Esistono dei $v \in \text{span}\{(1,1,2)\}$ per i quali A_v sia la matrice di una proiezione p_U^W (per opportuni sottospazi U e W tali che $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$)?