Soluzioni Tutorato 8

(1) Data la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

si determini la relativa forma bilineare, si calcoli il rango e si individui se sia degenere, simmetrica o nessuna delle due. In caso sia degenere, determinare i vettori isotropi.

Soluzione: La forma bilineare $g(u, v)$ è determinata a partire dalla base canonica ricordando che: $A_{ij} = g(e_i, e_j)$. Facciamo due esempi:

$$0 = A_{11} = g(e_1, e_1), \qquad 4 = A_{12} = g(e_1, e_2).$$

La prima uguaglianza indica che nella forma bilineare non è presente il termine $v_1 w_1$, mentre la seconda dice che è presente il termine $v_1 w_2$ con coefficiente 4.

In generale, posto $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ e $w = (w_1, w_2, w_3)^T$ si ha che

$$g(v,w) = v^T A w = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = 4v_1w_2+2v_1w_3+4v_2w_1+v_2w_3+2v_3w_1+v_3w_2+v_3w_3.$$

Osserviamo che la forma è simmetrica in quanto la matrice A lo è.

Per verificare se la forma è degenere va calcolato il nucleo di g. Nel caso della matrice A otteniamo un nucleo non nullo, in particolare un generico vettore del nucleo è dato da:

$$\begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -4t \end{pmatrix}$$

con $t \in \mathbf{R}$. Infatti abbiamo la seguente riduzione in forma a scala per A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-2\cdot I} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+2\cdot II} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La forma è quindi degenere, il che ci assicura la presenza di vettori isotropi, che ora andiamo a calcolare. Poiché

$$g(v,v) = 8xy + 4xz + 2yz + z^2 = (4x + z)(2y + z)$$

deduciamo che tutti i vettori isotropi sono del tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ -4\alpha_1 \end{pmatrix}, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbf{R} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ -2\beta_2 \end{pmatrix}, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbf{R}.$$

Quindi i vettori isotropi descrivono due piani incidenti, e la retta in cui si intersecano è proprio il nucleo della forma bilineare.

(2) Data la forma bilineare simmetrica su $\mathbf{R}^3$

$$g(v,w) = v_1w_1 + 2v_2w_2 + 3v_3w_3 - 4v_2w_3 - 4v_3w_2 + v_2w_1 + v_1w_2$$

e la base di $\mathbf{R}^3$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$

scrivere:

(a) la matrice S che rappresenta g rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di R^3,
(b) la matrice S' che rappresenta g rispetto alla base B,
(c) la matrice $T_B^{\mathcal{E}}$ di cambiamento di base da B a $\mathcal{E}$.
(d) Verificare infine che $S' = (T_B^{\mathcal{E}})^T S T_B^{\mathcal{E}}$.

Soluzione: Rispetto alla base canonica abbiamo $g(e_1, e_1) = 1$; $g(e_1, e_2) = 1$; $g(e_1, e_3) = 0$; $g(e_2, e_2) = 2$; $g(e_3, e_3) = 3$; $g(e_2, e_3) = -4$.

Quindi rispetto alla base canonica troviamo la matrice rappresentativa

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Per trovare la matrice che rappresenta la forma bilineare nella base B, similmente si calcola che $g((1,0,-1),(3,3,3)) = 9$ ed analogamente per tutte le altre coppie di vettori di base. Così la matrice rispetto a B è

$$S' = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 11 \\ 9 & 0 & -39 \\ 11 & -39 & -78 \end{pmatrix}$$

La matrice del cambio di base è

$$T_B^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

e si controlla facilmente che $S' = (T_B^{\mathcal{E}})^T S T_B^{\mathcal{E}}$.

(3) (a) Si dimostri che

$$p \cdot q = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \ldots + p(n)q(n)$$

è un forma bilineare simmetrica su $\mathbf{R}[x]_{\leq n}$.

(b) Sia $f_k = \prod_{i \in \{0,1,2,\ldots,n\} \setminus \{k\}} (x - i)$. (Per esempio, se $n = 4$ e $k = 2$ allora $f_2 = x(x-1)(x-3)(x-4)$.) Si dimostri che $\mathcal{B} = \{f_0, \ldots, f_n\}$ è una base di $\mathbf{R}[x]_{\leq n}$.

(c) Si calcola la matrice delle forme bilineare di (a) rispetto alla base $\mathcal{B}$ e si dimostri che la forma bilineare è un prodotto scalare.

Soluzione:

(a) Per mostrare che g è bilineare si nota che $p_1(k) + \lambda p_2(k) = (p_1 + \lambda p_2)(k)$, quindi

$$\begin{aligned} (p_1 + \lambda p_2) \cdot q &= \sum_{k=0}^{n} (p_1 + \lambda p_2)(k) q(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (p_1(k)q(k) + \lambda p_2(k) q(k)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} p_1(k) q(k) + \lambda \sum_{k=0}^{n} p_2(k) q(k)) \\ &= p_1 \cdot q + \lambda (p_2 \cdot q) \end{aligned}$$

In questo modo otteniamo la linearità sul primo fattore, sul secondo fattore la verifica è simile. Verifichiamo infine la simmetria:

$$p \cdot q = \sum_{k=0}^{n} p(k) q(k) = \sum_{k=0}^{n} q(k) p(k) = q \cdot p.$$

(b) Osserviamo che $\mathcal{B}$ è un insieme di $n+1$ elementi in uno spazio vettoriale di dimensione $\dim \mathbf{R}[x]_{\leq n} = n + 1$. Basta quindi mostrare che essi sono linearmente indipendenti per avere che formano una base.

Siano $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ tali che $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x) = 0$. Se sostituiamo $x = i$, allora per $k \neq i$ abbiamo che $f_k(i) = 0$ e quindi la precedente somma si riduce a $\lambda_i f_i(i)$ =0. Gli zeri di f_i sono tutti gli interi tra 0 e n tranne i, quindi $f_i(i) \neq 0$ e troviamo che $\lambda_i = 0$ per ogni i. Questo mostra l'indipendenza lineare dei vettori in $\mathcal{B}$.

(c) Si nota facilmante che $f_i(j) = 0$ se $i \neq j$ e $j \in \{0, \dots, n\}$. Quindi per $i \neq k$ si ha che

$$f_i \cdot f_k = f_i(0)f_k(0) + \dots f_i(i)f_k(i) + \dots + f_i(k)f_k(k) + \dots + f_i(n)f_k(n) = 0.$$

Invece

$$f_i \cdot f_i = f_i(i)^2 = \prod_{j=0; j\neq i}^{n} (i-j)^2 > 0.$$

Quindi la matrice rispetto a questa base è una matrice diagonale, e le entrate sulla diagonale sono positive.

Di conseguenza tutti gli autovalori sono positivi e la forma è definita positiva.

(4) Sia $v \in \text{span}\{(1,1,2)\}$. Verificare che le condizioni $L(2,1,0) = (2,1,2)$, $L(1,-1,0) = (1,-1,4)$ ed $L(0,0,1) = v$ individuano un endomorfismo L_v di $\mathbf{R}^3$ e scriverne la matrice A_v rispetto alla base canonica.

(a) Per ogni $v \in \text{span}\{(1,1,2)\}$, stabilire se l'endomorfismo L_v sia diagonalizzabile, determinandone una base di autovettori. Altrimenti, scrivere una matrice di Jordan simile ad A_v.

(b) Gli endomorfismi L_v ammettono autovettori comuni?

(c) Esistono dei $v \in \text{span}\{(1,1,2)\}$ per i quali A_v sia la matrice di una proiezione p_U^W (per opportuni sottospazi U e W tali che $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$)?

Soluzione:

(a) Dal momento che

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0,$$

quindi i tre vettori formano una base $\mathcal{B}$ ed L_v è sempre ben definito. Un vettore $v \in \text{span}\{(1,1,2)\}$ è della forma $v_k = (k,k,2k)$ per $k \in \mathbf{R}$. Abbiamo quindi

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(L) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & -1 & k \\ 2 & 4 & 2k \end{pmatrix}$$

e dal fatto che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(L) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(L) T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ deduciamo che la matrice associata all'endomorfismo rispetto alla base canonica sarà quindi $A_k = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(L) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(L)(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}})^{-1}$, cioè

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & -1 & k \\ 2 & 4 & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & -1 & k \\ 2 & 4 & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k \\ 2 & -2 & 2k \end{pmatrix}.$$

Andiamo a ricercare autovalori ed autovettori. Il polinomio caratteristico è

$$p_{A_k}(t) = \det(A_k - tI_3) = (1-t)^2(2k-t).$$

Se $k = 1/2$, l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 3. Poiché la matrice iniziale non è diagonale otteniamo direttamente che la matrice

$A_{1/2}$ non è diagonalizzabile. Andiamo a calcolare gli autospazi in questo caso:

$$E_1 = \ker(A_{1/2} - I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\{(1,1,0)\},$$

con $m_g(1) = 1$. Quindi la forma di Jordan ha un unico blocco ($\dim E_1 = 1$), ed esplicitamente è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq 1/2$, andiamo a calcolare gli autospazi. In questo caso l'autovalore $2k$ è un autovalore semplice, quindi ci concentriamo solo sull'autovalore 1. Abbiamo

$$E_1 = \ker(A_k - I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & k \\ 2 & -2 & 2k-1 \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq 0$ la matrice $A_k - I_3$ ha rango 2, quindi $m_g(1) = 3 - 2 = 1$ e così la matrice A_k risulta ancora non diagonalizzabile. Si vede inoltre facilmente che un generatore per E_1 è $(1,1,0)$. La forma di Jordan di A_k è quindi necessariamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{pmatrix}.$$

Se $k = 0$, allora

$$E_1 = \ker(A_0 - I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\{(1,0,2),(0,1,-2)\},$$

e $E_0 = \ker(A_0) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\{(0,0,1)\}$. La matrice A_0 è quindi diagonalizzabile, con forma diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Considerando il caso $k = 1/2$, deduciamo facilmente che l'unica possibilità per cui un vettore sia un autovettore comune a tutti gli endomorfismi è che tale vettore sia un multiplo di $(1,1,0)$, ed è facile osservare che tale vettore è in effetti un autovettore comune.

(c) Ricordando che la matrice della proiezione p_W^U è diagonalizzabile, con autovalori 0 ed 1 di autospazi $E_1 = W$ e $E_0 = U$, abbiamo che L_v è una proiezione solo per $k = 0$, con $W = \operatorname{span}\{(1,0,2),(0,1,-2)\}$, e $U = \operatorname{span}\{(0,0,1)\}$.