Didattica integrativa 8 - 30/11/2020-04/12/2020 - Soluzioni

Esercizio 1

Per enfatizzare la dipendenza dal parametro a, talvolta denoteremo la matrice A con $A^{(a)}$. Poiché $B = A^{(2)}$, svolgiamo prima il punto (b) in modo da avere gratis una parte del punto (a).

(b)

Si calcola facilmente che il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = (3-t)(1-t)^2$, quindi gli autovalori di A sono 1 e 3. L'autospazio relativo a 3 è

$$V_3^A = Sol(A - 3id, \vec{0}) = Sol\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}, \vec{0}\right) = Sol\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \vec{0}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

L'autospazio relativo a 1 è

$$V_1^A = Sol(A - id, \vec{0}) = Sol\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}, \vec{0}\right).$$

Qui dobbiamo distinguere due casi.

1. Se $a \neq 0$, allora $V_1^A = Sol\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{0}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. In particolare $m_g(1) = 1$, quindi A non è diagonalizzabile poiché $m_a(1) = 2$.
2. Se $a = 0$, allora $V_1^A = Sol\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{0}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. In questo caso $m_g(1) = 2 = m_a(1)$, quindi, poiché $m_g(3) = 1 = m_a(3)$, abbiamo che A è diagonalizzabile.

(a)

Poiché $B = A^{(2)}$ gli autovalori sono $1, 3$ e gli autospazi sono dati dal caso (1) precedente. Quindi B non è diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico di C è $p_C(t) = (1-t)^2(3-t)$, quindi gli autovalori di C sono 1 e 3. L'autospazio relativo a 1 è

$$V_1^C = Sol(C - id, \vec{0}) = Sol\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{0}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

L'autospazio relativo a 3 è

$$V_3^C = Sol(C - 3id, \vec{0}) = Sol\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \vec{0}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Quindi C è diagonalizzabile, poiché le molteplicità algebriche degli autovalori coincidono con le rispettive molteplicità geometriche.

B e C non rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse. Infatti, supponiamo per assurdo che ciò succeda. Allora abbiamo che B e C sono simili, cioè esiste una matrice M tale che $M^{-1}BM = C$. Dato che C è diagonalizzabile, sappiamo che esiste Q tale che $Q^{-1}CQ$ è una matrice diagonale. Ma allora anche $Q^{-1}CQ = Q^{-1}M^{-1}BMQ = (MQ)^{-1}B(MQ)$ è diagonale, e ciò implica che B è diagonalizzabile, assurdo.

(c)

Se $a \neq 0$ allora A non è diagonalizzabile ma C sì, quindi le due matrici non possono essere simili per lo stesso argomento della fine del punto (a).

Perciò assumiamo che $a = 0$, quindi entrambe le matrici sono diagonalizzabili. Nel punto (b) abbiamo trovato una base di autovettori di A:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Chiamiamo P la matrice che ha come colonne questi vettori, quindi

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_1' & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora abbiamo che

$$AP = \begin{pmatrix} Av_1 & Av_1' & Av_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_1' & 3v_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e quindi $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Applichiamo lo stesso procedimento per C: abbiamo visto che una base di autovettori è

$$w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sia

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice che questi vettori come colonne. Allora $Q^{-1}CQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$, quindi, moltiplicando a sinistra per Q e a destra per Q^{-1} otteniamo

$$C = QP^{-1}APQ^{-1} = (PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1})$$

e perciò basta prendere $H = PQ^{-1}$.

(d)

Se $a = 0$ allora A è diagonalizzabile e B no, quindi non possono essere simili. Perciò assumiamo che $a \neq 0$.

A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico, ovvero $p(t) := p_A(t) = p_B(t) = (1-t)^2(3-t)$, dal quale possiamo facilmente ricavare la forma canonica di Jordan di entrambe (si ricordi il Lemma 6.65 delle dispense): $m_a(3) = 1$ ci dice che abbiamo un solo blocco di Jordan relativo a 3 che ha dimensione 1; per quanto riguarda l'autovalore 1, chiaramente l'unica possibilità è che ci sia un blocco di Jordan di dimensione 2 (se ce ne fossero 2 di dimensione 1, le matrici A e B sarebbero diagonalizzabili, cosa che abbiamo escluso imponendo $a \neq 0$)

Visto che ogni matrice è simile ad una matrice in forma di Jordan, il fatto che A e B hanno la stessa forma di Jordan per $a \neq 0$ ci dice che in questo caso sono simili.

Osservazione Il polinomio caratteristico di C è uguale a quello di B (ed A), ma C è diagonalizzabile mentre B non lo è; il polinomio caratteristico quindi non è sufficiente per determinare la forma di Jordan di una matrice.

Esercizio 2

(a)

Se $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di φ allora esiste un $v_\lambda \in \mathbf{R}^n$ *non nullo* tale che $\varphi(v_\lambda) = \lambda v_\lambda$ (il pedice λ serve solo ad indicare che quello è un autovettore relativo all'autovalore λ; per non appesantire la notazione, nel seguito dell'esercizio il pedice sarà omesso). Per ipotesi, abbiamo che:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= (\varphi - 3id_{\mathbf{R}^n}) \circ (\varphi - 2id_{\mathbf{R}^n})(v) = (\varphi - 3id_{\mathbf{R}^n})(\varphi(v) - 2v) = (\varphi - 3id_{\mathbf{R}^n})((\lambda - 2)v) = \\ &= \varphi((\lambda-2)v) - 3(\lambda-2)v = (\lambda-2)\varphi(v) - 3(\lambda-2)v = (\lambda-2)\lambda v - 3(\lambda-2)v = (\lambda-2)(\lambda-3)v\end{aligned}$$

Visto che $v \neq \vec{0}$, dobbiamo concludere che $\lambda \in \{2, 3\}$.

(b)

Sia $v \in \mathbf{R}^n$ qualsiasi:

- $(\varphi - 3id_{\mathbf{R}^n})(\varphi(v) - 2v) = (\varphi - 3id_{\mathbf{R}^n}) \circ (\varphi - 2id_{\mathbf{R}^n})(v) = \vec{0}$ per ipotesi; quindi $\varphi(v) - 2v \in V_3$.
- $(\varphi - 2id_{\mathbf{R}^n})(\varphi(v) - 3v) = \varphi(\varphi(v)) - 3\varphi(v) - 2\varphi(v) + 6v = (\varphi - 3id_{\mathbf{R}^n})(\varphi(v) - 2v) = (\varphi - 3id_{\mathbf{R}^n}) \circ (\varphi - 2id_{\mathbf{R}^n})(v) = \vec{0}$ per ipotesi; quindi $\varphi(v) - 3v \in V_2$.

(c)

Ricordiamo che φ è diagonalizzabile (in $\mathbf{R}$) se e solo se:

1. Il suo polinomio caratteristico $p(t)$, che ha grado n, ha n radici reali contate con le rispettive molteplicità.
2. Per ogni autovalore λ di φ, l'autospazio V_λ ha dimensione pari alla molteplicità algebrica di λ.

La prima condizione risulta soddisfatta grazie al punto (a): visto che gli unici autovalori di φ (equivalentemente, le uniche radici di $p(t)$) sono 2 e 3, deve valere $p(t) = (t-2)^{a_2}(t-3)^{a_3}$ con $a_2 + a_3 = n$. Resta da dimostrare che anche la seconda condizione è soddisfatta.

Sia U un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ tale che $\mathbf{R}^n = V_2 \oplus U$ e $V_3 \subseteq U$, allora $dim(V_3) \leq dim(U)$. Se $v \in U$ è non nullo, visto che $v \notin V_2$ deve valere $(\varphi - 2id_{\mathbf{R}^n})(v) \neq \vec{0}$; questo significa che $(\varphi - 2id_{\mathbf{R}^n})$ è iniettivo su U, e di conseguenza otteniamo $dim(U) = dim((\varphi - 2id_{\mathbf{R}^n})(U))$. Ma il punto (b) ci dice che $(\varphi - 2id_{\mathbf{R}^n})(\mathbf{R}^n) \subseteq V_3$, dunque in particolare $(\varphi - 2id_{\mathbf{R}^n})(U) \subseteq V_3$ e quindi $dim(U) = dim((\varphi - 2id_{\mathbf{R}^n})(U)) \leq dim(V_3)$. Dobbiamo quindi concludere che $dim(U) = dim(V_3)$, ovvero che $U = V_3$ e $\mathbf{R}^n = V_2 \oplus V_3$. Detti allora $d_2 := dim(V_2)$ e $d_3 := dim(V_3)$, abbiamo che $d_2 + d_3 = n$ e $1 \leq d_2 \leq a_2, 1 \leq d_3 \leq a_3$ con $a_2 + a_3 = n$: l'unica possibilità di soddisfare tutte queste condizioni è data da $d_2 = a_2$ e $d_3 = a_3$, dunque la seconda condizione per la diagonalizzabilità è soddisfatta e φ è diagonalizzabile.

Esercizio 3

Con semplice calcolo si può vedere che il polinomio caratteristico di A_1 è $(2-t)^2(1-t)^2$, quindi A_1 ha autovalori 1 e 2 entrambi con molteplicità algebrica 2. Calcoliamo ora gli autospazi. Abbiamo che

$$A_1 - id = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_1 - 2id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi

$$V_1 = \ker(A_1 - id) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$V_2 = \ker(A_1 - 2id) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ne deduciamo che la molteplicità geometrica di ogni autovalore è uguale alla sua molteplicità algebrica, quindi la matrice è diagonalizzabile. Una sua forma diagonale è data da

$$P^{-1}A_1P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

dove $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il polinomio caratteristico di A_2 è $(2-t)^4$, quindi 2 è l'unico autovalore di A_2. Calcoliamo il relativo autospazio:

$$V_2 = \ker(A_2 - 2id) = Sol\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{0} \right) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La matrice non è diagonalizzabile, ma il suo polinomio caratteristico è prodotto di fattori lineari, quindi possiamo metterla in forma di Jordan.

Per calcolare una forma e una base di Jordan calcoliamo gli spazi $W_i := \ker(A_2 - 2id)^i$. Abbiamo che $W_1 = V_2$ e $W_2 = \ker(A_2 - 2id)^2 = \mathbf{R}^4$, poiché $(A_2 - 2id)^2 = 0$. Scegliamo ora due vettori $v_2^{(1)}, v_2^{(2)}$ tali che

$$W_1 \oplus \operatorname{span}\{v_2^{(1)}, v_2^{(2)}\} = W_2 = \mathbf{R}^4,$$

ovvero tali che completino una base di W_1 a una base di W_2. Abbiamo già calcolato una base di W_1, quindi si vede facilmente che una scelta possibile è

$$v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ora definiamo

$$v_1^{(1)} = (A - 2id)v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1^{(2)} = (A - 2id)v_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fissato k, abbiamo che i vettori del tipo $v_j^{(k)}$, al variare di j, sono gli elementi della base associati al k-esimo blocco di Jordan. La dimensione di questo blocco sarà quindi uguale al numero di questi vettori. Nel nostro caso abbiamo due blocchi di Jordan, entrambi di dimensione 2, perciò la forma di Jordan di A_2 è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Questa è la matrice di A_2 rispetto alla base di Jordan che abbiamo appena trovato. Tale base è ordinata nel seguente modo:

$$(v_1^{(1)}, \dots, v_{d_1}^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_{d_2}^{(2)}, \dots, v_1^{(m)}, \dots, v_{d_m}^{(m)}),$$

ovvero mettiamo prima gli elementi associati al primo blocco, poi quelli associati al secondo e così via. Quindi la forma di Jordan è data da $Q^{-1}A_2Q$, dove Q è la matrice che ha come colonne gli elementi della base ordinati nel modo che abbiamo appena descritto. Nel nostro caso quindi $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e

$$Q^{-1}A_2Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$