16. Didattica integrativa 8

(1) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$. Sia $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ ed $f(A, B) = \mathrm{tr}(A^t M B)$ in cui $A, B \in V$.
  (a) Dimostrare che f è una forma bilineare su V.
  (b) Trovare la matrice di f nella base canonica del spazio $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$.

(2) Data la forma su $\mathbf{R}^4$

$$g(v, w) = 3v_1w_1 + 3v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4 - \sqrt{2}v_2w_3\sqrt{2}v_3w_2 + v_2w_4 + v_4w_2$$

verificare che sia bilineare e simmetrica. Tale forma è anche un prodotto scalare?

(3) Siano $v, w \in \mathbf{R}^n$. Si dimostri che $v \cdot w = 0$ se e solo se per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ abbiamo $\|v\| \leq \|v + \lambda w\|$.

(4) Sia $U = \mathrm{span}((1, 2, 3, -4), (-5, 4, 3, 2)) \subset \mathbf{R}^4$. Si determinino basi ortogonali per U e $U^\perp$.

(5) Sia $g : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la forma bilineare simmetrica data da

$$g((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_2 + x_2y_3 + x_3y_3.$$

Si determini se g è definita positiva, semidefinita positiva, indefinta, semidefinita negativa o definita negativa.