18. Didattica integrativa 9

(1) Sia $V = \mathbf{R}[X]_{\leq 2}$. Per $p(x), q(x) \in V$ definiamo
$$(p, q) = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$
Per questo esercizio si può assumere che $(\cdot, \cdot)$ è un prodotto scalare. Sia $B = \{1, x, x^2\}$ la base canonica di V. Si determini la matrice delle forma bilineare $(\cdot, \cdot)$ e si applici il procedimento di Gram-Schmidt per ottenere una base canonica di V.

(2) Una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbf{C})$ è chiamata hermitiana se $\overline{A} = A^T$. Sia $\lambda \in C$ un autovalore di A, si dimostri che $\lambda \in \mathbf{R}$. Inoltre siano v, w autovettori per autovalori distinti. Si dimostri che $v^T \overline{w} = 0$.

(3) Sia
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$
Determinare gli autovalori e autovettori. Dimostrare che i due autovettori sono ortogonali. Si può dare una interpretazione geometrica della matrice?

(4) Sia $v \in \mathbf{R}^n$ un vettore. Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ la funzione lineare definita da $f(x) = x \cdot v$. Si dimostra che f è una funzione lipschitziana, quindi una funzione tale che esiste un $L \in \mathbf{R}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$ abbiamo che
$$||f(x) - f(y)|| \leq L||x - y||.$$