CAPITOLO 7

Prodotti scalari, forme bilineari e applicazioni

Iniziamo questo capitolo segnalando che, a differenza dei precedenti capitoli, la teoria dipende in modo sostanziale dal campo sul quale si lavora. In particolare, parti di questo capitolo funzionano soltanto nel caso $K = \mathbf{R}$, o $K = \mathbf{C}$.

1. Il prodotto scalare standard in $\mathbf{R}^n$

Sia $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ un vettore. Allora la distanza tra il punto (x_1, x_2) e l'origine è $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Similmente (applicando adesso il teorema di Pitagora due volte), troviamo che il punto $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ ha distanza $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ dall'origine. Possiamo quindi definire la lunghezza di un vettore $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ come

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Prendiamo ora due vettori $v = (x_1, x_2)$ e $w = (y_1, y_2)$. Consideriamo il triangolo i cui lati sono formati da v e w. Allora troviamo che i tre lati hanno lunghezza

$$a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, b = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, c = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Se α è l'angolo tra v e w troviamo, con il *Teorema del coseno*, che

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha).$$

Adesso

$$c^2 - a^2 - b^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) - (y_1^2 + y_2^2) = -(2x_1y_1 + 2x_2y_2).$$

Quindi

$$\cos(\alpha) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{ab}.$$

Similmente troviamo col Teorema del coseno che per $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ vale

$$\cos(\alpha) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{ab}$$

Definizione 7.1. Il *prodotto scalare standard* su $\mathbf{R}^n$ è la funzione $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ data da

$$v \cdot w = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

dove $v = (x_1, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, \ldots, y_n)$.

La *lunghezza* di un vettore v, scritto $\|v\|$, è $\sqrt{v \cdot v} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

Quindi in $\mathbf{R}^2$ ed $\mathbf{R}^3$ abbiamo che l'angolo α tra v e w soddisfa

$$\cos(\alpha) = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|}$$

(Si nota che ci sono due angoli α, β tra i vettori v e w che soddisfano $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$.)

Proposizione 7.2. *Siano $u, v, w \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}$ allora*

(1) Se per ogni $u \in \mathbf{R}^n$ abbiamo che $u \cdot v = 0$ allora $v = \overrightarrow{0}$.

(2) $u \cdot u \geq 0$. Inoltre se $u \cdot u = 0$ allora $u = \overrightarrow{0}$. (Definito positivo)

(3) $u \cdot v = v \cdot u$. *(Simmetrico)*
(4) $(u + \lambda v) \cdot w = u \cdot w + \lambda v \cdot w$ *e* $u \cdot (v + \lambda w) = u \cdot v + \lambda u \cdot w$. *(Bilinearità)*

DIMOSTRAZIONE. Sia $v = (y_1, \ldots, y_n)$. Dal fatto che per $u = e_i$ abbiamo $u \cdot v = 0$ e, contemporaneamente $u \cdot v = y_i$, segue che $y_i = 0$ per ogni i.

Se $u = (x_1, \ldots, x_n)$ allora

$$u \cdot u = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

Quindi $u \cdot u$ è non-negativo perché è una somma di quadrati. Se $u \cdot u = 0$ allora $x_i^2 = 0$ per ogni i e $u = \overrightarrow{0}$.

La terza e la quarta properietà sono conseguenza della definizione ed alcuni semplici calcoli. □

PROPOSIZIONE 7.3. *Per* $v \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}$

(1) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.
(2) $\|v\| \geq 0$
(3) $\|v\| \neq 0$ *per ogni* $v \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Se $v = (x_1, \ldots, x_n)$ allora $\lambda v = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. La prima properietà segue da

$$\begin{aligned} \|\lambda v\| &= \sqrt{\sum (\lambda x_i)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \sum x_i^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\sum x_i^2} \\ &= |\lambda| \|v\| \end{aligned}$$

La seconde e la terza properietà seguono dalla proposizione precedente e dal fatto che $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$. □

PROPOSIZIONE 7.4. *Per* $u, v \in \mathbf{R}^n$ *abbiamo le seguenti uguaglianze.*

(1) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u \cdot v)$.
(2) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

DIMOSTRAZIONE. La prima uguaglianza segue da

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v) \cdot (u + v) = u \cdot (u + v) + v \cdot (u + v) \\ &= u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v \\ &= u \cdot u + 2(u \cdot v) + v \cdot v \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u \cdot v) \end{aligned}$$

La seconda uguaglianza segue da

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 &= ((u + v) \cdot (u + v)) + ((u - v) \cdot (u - v)) \\ &= u \cdot u + 2(u \cdot v) + v \cdot v + u \cdot u - 2(u \cdot v) + v \cdot v \\ &= 2(u \cdot u) + 2(v \cdot v) \\ &= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \end{aligned}$$

□

PROPOSIZIONE 7.5 (Cauchy-Schwarz). *Abbiamo*

$$|(v \cdot w)| \leq \|v\| \|w\|$$

Dimostrazione. Se $w = \overrightarrow{0}$ non c'è nulla da mostrare.
Assumiamo che $w \neq \overrightarrow{0}$. Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$0 \leq (v - \lambda w) \cdot (v - \lambda w) = v \cdot v - 2\lambda v \cdot w + \lambda^2 w \cdot w$$

Consideriamo ora $\lambda = \frac{v \cdot w}{w \cdot w}$ trovando

$$0 \leq v \cdot v - 2\frac{(v \cdot w)^2}{(w \cdot w)} + \frac{(v \cdot w)^2}{w \cdot w}$$

Quindi

$$0 \leq v \cdot v - \frac{(v \cdot w)^2}{(w \cdot w)}$$

e

$$(v \cdot w)^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2.$$

Prendendo la radice quadrata otteniamo la disuguaglianza cercata. □

Osservazione 7.6. Si ottiene quindi che per due vettori $v, w \in \mathbf{R}^n$ possiamo definire l'angolo tra v e w come il numero α tale che $\cos(\alpha) = \frac{(v \cdot w)}{\|v\|\|w\|}$. Questa osservazione ci permette di estendere il concetto di angolo ad un qualsiasi spazio vettoriale dotato di prodotto scalare.

Esempio 7.7. Siano $v = (1, 1, 1), w = (1, 2, 2) \in \mathbf{R}^3$. Allora $v \cdot w = 5$, $v \cdot v = 3$,$w \cdot w = 9$. Quindi $\cos(\alpha) = \frac{5}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{9}} = \frac{5}{9}\sqrt{3}$.

Proposizione 7.8 (Disuguaglianza triangolare). *Per $v, w \in \mathbf{R}^n$ abbiamo*

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Dimostrazione. Dalla Proposizione 7.4 segue che

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2(v \cdot w) + \|w\|^2.$$

Il lato destro è maggiorato da

$$\|v\|^2 + 2|(v \cdot w)| + \|w\|^2.$$

Con Cauchy-Schwarz troviamo che è al massimo

$$\|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2.$$

Quindi

$$(\|v + w\|)^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2.$$

Per concludere la dimostrazione è quindi sufficiente considerare la radice quadrata per entrambi i membri. □

Definizione 7.9. La *distanza* tra u e v è definita da

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

Proposizione 7.10. *(1) $d(u, v) \geq 0$*
(2) $d(u, v) > 0$ se $u \neq v$.
(3) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

Dimostrazione. Le prime due properietà sono una conseguenza di

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

che è sempre non-negativo, ed è uguale a zero se e solo se $u - v = \overrightarrow{0}$, quindi se e solo se $u = v$.

Per la terza properietà utilizziamo che

$$d(u, w) = \|u - w\| = \|(u - v) + (v - w)\| \leq \|(u - v)\| + \|(v - w)\| = d(u, v) + d(v, w)$$

□

2. Forme bilineari simmetriche

In questa sezione considereremo K un campo qualsiasi.

Definizione 7.11. Sia V uno spazio vettoriale. Una *forma bilineare* è una funzione $g : V \times V \to K$ tale che per ogni $w \in V$, le funzioni $f_i : V \to K$ con $f_1(v) = g(v, w)$ e $f_2(v) = g(w, v)$ siano entrambe lineari.

La forma g è *simmetrica* se per ogni $v, w \in V$ abbiamo $g(v, w) = g(w, v)$.

Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita, g una forma bilineare e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V, possiamo allora associare una matrice a g, che determina g.

Siano $v, w \in V$ due vettori e consideriamo le loro coordinate rispetto alla base B. Quindi $v = \sum x_i v_i$ e $w = \sum y_j v_j$, con $x_i, y_j \in K$. Allora troviamo che

$$g(v, w) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i g(v_i, y_j v_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1} x_i y_j g(v_i, v_j)$$

Quindi g è completamente determinata da $g(v_i, v_j)$. Sia adesso A la matrice $n \times n$ tale che $a_{ij} = (g(v_i, v_j))$. Allora chiamiamo A la martrice di g rispetto a B. Troviamo che

$$g(v, w) = \varphi_B(v)^T A \varphi_B(w).$$

Viceversa, abbiamo che ogni matrice $A \in M_{n\times n}(K)$ definisce una forma bilineare

$$(v, w) \mapsto \varphi_B(v)^T A \varphi_B(w).$$

Quindi le forme bilineari su V corrispondono alle matrici $n \times n$, dove $n = \dim V$.

Ricordiamo che una matrice C è simmetrica se $C^T = C$.

Lemma 7.12. *La matrice A associata alla forma bilineare g è simmetrica se e solo se g è simmetrica.*

Dimostrazione. Se g è simmetrica allora $g(v_i, v_j) = g(v_j, v_i)$. Allora

$$(A^T)_{ij} = A_{ji} = g(v_j, v_i) = g(v_i, v_j) = A_{ij}.$$

Quindi A è simmetrica.

Se A è simmetrica allora

$$\begin{aligned} g(v, w) &= g(v, w)^T \\ &= (\varphi_B(v)^T A \varphi_B(w))^T \\ &= \varphi_B(w)^T A^T (\varphi(v)^T)^T \\ &= \varphi_B(w)^T A \varphi_B(v) \\ &= g(v, w) \end{aligned}$$

(La prima uguaglianza è conseguenza del fatto che per una matrice 1×1 abbiamo $M^T = M$. Per la terza uguaglianza utilizziamo che $(BC)^T = C^T B^T$. Per la quarta utilizziamo che $(B^T)^T = B$ ed il fatto che A è simmetrica.)

Quindi g è simmetrica. □

Lemma 7.13. *Sia g una forma bilineare, A la matrice rispetto alla base B e A' rispetto ad una base B'. Allora*

$$A' = Q^T A Q$$

con $Q = T^B_{B'}$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} g(v,w) &= \varphi_B(v)^T A \varphi_B(w) = (T^B_{B'}\varphi_{B'}(v))^T A (T^B_{B'}\varphi_{B'}(v)) = \\ &= (Q\varphi_{B'}(v))^T A Q \varphi_{B'}(v) = \varphi_{B'}(v)^T Q^T A Q \varphi_{B'}(v). \end{aligned}$$

□

Definizione 7.14. Sia g una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale V. *Il nucleo* di g è l'insieme

$$\ker(g) = \{v \in V \mid g(v,w) = 0 \quad \text{per ogni } w \in V\}.$$

Un forma bilineare simmetrica g su V si dice *non degenere* se $\ker(g) = \overrightarrow{0}$, altrimenti si dice *degenere*.

Osservazione 7.15. Sia $g : V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica. Sia W un sottospazio vettoriale di V tale che $V = \ker(g) \oplus W$. Adesso si può mostrare che la restrizione di g a $W \times W$ definisce una forma bilineare simmetrica, che è non degenere.

Osservazione 7.16. Sia $I = \{v \in V \mid g(v,v) = 0\}$, allora I consiste dei *vettori isotropi*. Ovviamente abbiamo che $\ker(g) \subset I$. In generale I non è un sottospazio vettoriale.

Nel caso che non ci sono vettori isotropi, quindi quando I è $\{\overrightarrow{0}\}$, allora troviamo che $\ker(g) = \{\overrightarrow{0}\}$ e che g è nondegnere.

Lemma 7.17. *Sia g una forma bilineare simmetrica su uno spazio finitamente generato V, A la matrice di g rispetto ad una base B. Allora g è non degenere se e solo se* $\det A \neq 0$.

Dimostrazione. Se $\det(A) = 0$ allora le colonne di A sono linearmente dipendenti. Quindi esiste un $v \neq \overrightarrow{0}$ tale che $A \cdot \varphi_B(v) = \overrightarrow{0}$. Quindi $g(v,w) = g(w,v) = \varphi_B(w)^T A \varphi_B(v) = \varphi_B(w)^T \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Assumiamo adesso che $\det(A) \neq 0$. Sia $v \in V, v \neq 0$. Allora esiste un i tale che $\varphi_B(v)_i \neq 0$. Sia w tale che $\varphi_B(w) = A^{-1}e_i$. Allora

$$g(v,w) = \varphi_B(v)^T A \varphi_B(w) = \varphi_B(v) \cdot e_i = \varphi_B(v)_i \neq 0$$

Quindi $v \notin \ker(g)$. □

Definizione 7.18. Sia V uno spazio vettoriale e $g : V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica non-degenere. Due vettori $u, v \in V$ si dicono *ortogonali* se $g(u,v) = 0$. Due sottospazi $U, W \subseteq V$ si dicono ortogonali se $g(u,w) = 0$ per ogni $u \in U$ e $w \in W$.

Dato un sottoinsieme S di V definiamo il suo ortogonale come

$$S^\perp = \{v \in V \mid g(v,w) = 0, \ \forall w \in S\}.$$

Proposizione 7.19. *Sia V uno spazio vettoriale, g una forma bilineare simmetrica, S un sottoinsieme di V. Allora:*

(1) $S^\perp$ *è un sottospazio vettoriale di V,*
(2) $S^\perp = \mathrm{span}(S)^\perp$.
(3) $S \subset \mathrm{span}(S) \subset (S^\perp)^\perp$.

Dimostrazione. Per il primo punto notiamo che se $g(v_1,w) = 0$ per ogni $w \in S$ e $g(v_2,w) = 0$ per ogni $w \in S$ allora per ogni $w \in S$ abbiamo che

$$g(v_1 + \lambda v_2, w) = g(v_1,w) + \lambda g(v_2,w) = 0.$$

Quindi se $v_1, v_2 \in S^\perp$ allora $v_1 + \lambda v_2 \in S^\perp$. Inoltre $\overrightarrow{0} \in S^\perp$.

Per il secondo punto notiamo che per ogni coppia di insiemi S, T tali che $S \subset T$ abbiamo $T^{\perp} \subset S^{\perp}$. Quindi $\operatorname{span}(S)^{\perp} \subset S^{\perp}$. Sia $v \in S^{\perp}$. Sia $w \in \operatorname{span}(S)$. Allora esistono $w_1, \ldots, w_k \in S$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ tali che $w = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_k w_k$. Allora

$$g(v, w) = g\left(v, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g(v, w_i) = 0.$$

Quindi $v \in \operatorname{span}(S)^{\perp}$.

Il terzo punto viene lasciato come esercizio per il lettore. □

Esempio 7.20. Sia $W = \operatorname{span}((1,2,3,0),(0,1,2,4)) \subset \mathbf{R}^4$. Allora $W^{\perp}$ consiste di tutti i vettori che sono ortogonali sia a $(1,2,3,0)$, che a $(0,1,2,4)$. Quindi

$$W^{\perp} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0\}.$$

Quindi $W^{\perp} = \operatorname{Sol}(A, \overrightarrow{0})$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lemma 7.21. *Sia V uno spazio vettoriale e W un sottospazio di V. Allora abbiamo che $W \cap W^{\perp}$ è un sottospazio di V.*

Dimostrazione. Abbiamo dimostrato nella precedente proposizione che $W^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di V, quindi otteniamo il risultato dalle proprietà dei sottospazi vettoriali. □

Lemma 7.22. *Sia g una forma bilineare simmetrica non-degenere su uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Allora per ogni sottospazio W*

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$$

Dimostrazione. Dopo la scelta di una base B di V possiamo identificare W con la sua immagine tramite φ_B, e il suo sottospazio ortogonale è l'immagine di $W^{\perp}$. È quindi sufficiente mostrare il risultato per $V = K^n$. Sia A la matrice di g. Dal fatto che g è non degenere segue che A sia invertibile.

Sia $S = \{w_1, \ldots, w_k\}$ una base di W. Sia B la matrice le cui colonne sono i vettori di S. Allora un vettore v è in $W^{\perp} = S^{\perp}$ se

$$w_i^T A v = \overrightarrow{0}$$

per $i = 1, \ldots, k$. Questo succede se e solo se

$$(B^T A) v = \overrightarrow{0}.$$

Quindi $S^{\perp} = \operatorname{Sol}(B^T A, \overrightarrow{0})$. Quando si moltiplicano matrici il rango rimane uguale o si abbassa, quindi

$$\operatorname{rg}(B^T) \geq \operatorname{rg}(B^T A) \geq \operatorname{rg}(B^T A A^{-1}) = \operatorname{rg}(B).$$

Risulta quindi che $\operatorname{rg} B^T A = \operatorname{rg} B^T = k$, e $\dim W^{\perp} = \dim \operatorname{Sol}(B^T A, \overrightarrow{0}) = n-k$. □

Esempio 7.23. Se $v \in W \cap W^{\perp}$ allora $g(v, v) = 0$. Quindi se per ogni $v \in V, v \neq \overrightarrow{0}$ vale che $g(v, v) \neq 0$ allora troviamo per ogni $W \subset V$ che

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Per esempio nel caso in cui g sia il prodotto scalare standard su $\mathbf{R}^n$ abbiamo che $\mathbf{R}^n = W \oplus W^{\perp}$. In quel caso abbiamo inoltre che $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$ e $\dim W = \dim (W^{\perp})^{\perp}$, quindi $W = (W^{\perp})^{\perp}$.

Se invece prendiamo

$$g((x_1, y_1, z_1, t_1),(x_2, y_2, z_2, t_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - t_1 t_2$$

allora $g((0,0,1,1),(0,0,1,1)) = 0$ e quindi abbiamo che per $W = \mathrm{span}((0,0,1,1))$ vale $W \subset W^{\perp}$.

3. Forme bilineari simmetriche reali

Per questa sezione considereremo $K = \mathbf{R}$. Sia $g : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineare simmetrica.

DEFINIZIONE 7.24. Sia g una forma bilineare simmetrica. Allora

(1) g è *definita positiva* se per ogni $v \in V$ con $v \neq \overrightarrow{0}$ abbiamo $g(v,v) > 0$.
(2) g è *semidefinita positiva* se per ogni $v \in V$ abbiamo $g(v,v) \geq 0$.
(3) g è *definita negativa* se per ogni $v \in V$ con $v \neq \overrightarrow{0}$ abbiamo $g(v,v) < 0$.
(4) g è *semidefinita negativa* se per ogni $v \in V$ abbiamo $g(v,v) \leq 0$.
(5) g è *indefinita* se esistono $v, w \in V$ con $g(v,v) < 0$ e $g(w,w) > 0$.

ESEMPIO 7.25. Il prodotto scalare standard è definito positivo.

Invece se $g : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ è definito da $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$, allora $g(e_1, e_1) = 1$ e $g(e_4, e_4) = -1$, ed è quindi indefinito.

DEFINIZIONE 7.26. Una forma bilineare simmetrica definita positiva è anche chiamata *prodotto scalare*, e verrà denotato con la stessa notazione del prodotto scalare standard, chiarendo ogni volta il contesto.

Uno *spazio vettoriale metrico* è uno spazio vettoriale V provvisto di un prodotto scalare. In questo caso è possibile definire la *lunghezza* di un vettore come

$$\|v\| = \sqrt{g(v,v)}.$$

ESEMPIO 7.27. Siano p e q due funzioni a coefficienti reali, continue nell'intervallo $[0,1]$, allora si ha che

$$g(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx,$$

è un prodotto scalare definito positivo.

OSSERVAZIONE 7.28. Per uno spazio vettoriale metrico valgono facilmente le Proposizioni 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.8 e 7.10.

4. Proiezione, riflessioni e metodo di Gram-Schmidt

In questa sezione considereremo $K = \mathbf{R}$. I risultati di questa sezione valgono per prodotti scalari.

Iniziamo con alcune considerazioni preliminari. Dato uno spazio vettoriale V, se possiamo scrivere $V = U \oplus W$, allora possiamo ottenere due applicazioni lineari abbastanza semplici indotte da questa costruzione. Sia $v \in V$, allora v può essere scritto in modo unico come $v = u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$. Abbiamo quindi le due seguenti applicazioni lineari.

- la *proiezione* di V su W lungo U, definita da $p_W(v) = w$.
- la *riflessione* di V rispetto a W in direzione U, definita dal $r_W(v) = w - u$

È facile dimostrare che queste due applicazioni sono lineari.

ESEMPIO 7.29. Iniziamo con un esempio 2-dimesionale. Sia $V = \mathbf{R}^2$ e sia

$$B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

una base di $\mathbf{R}^2$.

Oramai sappiamo benissimo che un qualsiasi vettore di $\mathbf{R}^2$ si scrive univocamente come combinazione lineare di v_1 e v_2. Consideriamo ora le applicazioni lineari di proiezione e riflessione su v_1 nella direzione v_2. In particolare, per ogni $v = av_1 + bv_2$ abbiamo

$$p_{v_1}(v) = av_1 \quad \text{e} \quad r_{v_1}(v) = av_1 - bv_2.$$

Inoltre, nella base B le matrici di queste applicazioni lineari sono molto semplici da calcolare

$$M_B^B(p_{v_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_B^B(r_{v_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Qual è l'unico problema? Il fatto che sia spesso difficile scrivere un vettore in una base qualsiasi.

Nel resto della sezione cercheremo di raffinare questa costruzione scegliendo in modo opportuno gli spazi W e U, in modo che la proiezione e la riflessione siano collegate al concetto di prodotto scalare e vedremo come per alcune basi particolari il prodotto scalare ci aiuti a scrivere i vettori nel modo più intelligente possibile.

Proposizione 7.30. *Sia V uno spazio vettoriale e W un sottospazio di V. Allora $V = W \oplus W^\perp$.*

Dimostrazione. Sappiamo che $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$ (Lemma 7.22). Quindi basta mostrare che W e $W^\perp$ sono in somma diretta. Se $w \in W \cap W^\perp$ allora $w \cdot w = 0$, dato che possiamo considerare il primo $w \in W$ ed il secondo $w \in W^\perp$. Ma avendo scelto un prodotto scalare ciò è possibile se e solo se $w = \overrightarrow{0}$. Quindi $W \cap W^\perp = \{\overrightarrow{0}\}$. □

Possiamo quindi scrivere ogni vettore v in modo unico come $w + w'$, con $w \in W$ e $w' \in W^\perp$. Troviamo automaticamente una funzione di proiezione $p_W : V \to W$ con $p_W(v) = w$. La proiezione avviene nella direzione di $W^\perp$ e per questo viene chiamata *proiezione ortogonale*.

Lemma 7.31. *La funzione p_W è lineare.*

Dimostrazione. Siano $v_1 = w_1 + w_1'$ e $v_2 = w_2 + w_2'$, con $w_i \in W$ e $w_i' \in W^\perp$. Allora $v_1 + \lambda v_2 = (w_1 + \lambda w_2) + (w_1' + \lambda w_2')$. Dal fatto che W e $W^\perp$ sono spazi vettoriali segue che $w_1 + \lambda w_2 \in W$ e $w_1' + \lambda w_2' \in W^\perp$. Quindi

$$p_W(v_1 + \lambda v_2) = w_1 + \lambda w_2 = p_W(v_1) + \lambda p_W(v_2)$$

□

Osservazione 7.32. Nel caso in cui $V = \mathbf{R}^n$ e g è il prodotto scalare standard, si può calcolare la matrice di p_W rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^n$ nel seguente modo.

Sia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base del sottospazio W di $\mathbf{R}^n$. Sia A la matrice con $v_1, \ldots, v_k$ come colonne. Allora per $v \in V$ vogliamo trovare $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbf{R}^k$ tale che $p_W(v) = x_1v_1 + \cdots + x_kv_k =: w$.

Quindi $w = Ax$ e $v - w \in W^\perp$. In particolare $A^T(v - w) = \overrightarrow{0}$. Quindi $A^Tv = A^Tw = A^TAx$. Allora, se A^TA è invertibile allora $x = (A^TA)^{-1}A^Tv$ e

$$w = Ax = A(A^TA)^{-1}A^Tv.$$

Quindi la matrice di p_W rispetto alla base canonica è

$$A(A^TA)^{-1}A^T$$

(Si può mostrare che A^TA è invertibile se e solo le colonne di A sono linearmente indipendenti.)

In certi casi possiamo trovare delle semplificazioni della formula. Il nostro prossimo obiettivo sarà quello di spiegare un procedimento che dia una base per

V tale che A^TA sia una matrice diagonale. In questo caso $(A^TA)^{-1}$ è facile da determinare.

Possiamo inoltre determinare una base tale che $A^TA = I_k$. In qual caso troviamo che $p_W(v) = AA^Tv$.

OSSERVAZIONE 7.33. Un altro modo per ottenere la matrice di p_W è il seguente. Data una base $\{v_1, \ldots, v_k\}$ di W, sia A la matrice con $v_1, \ldots, v_k$ come colonne, allora $W^\perp$ è $\mathrm{Sol}(A^T, \overrightarrow{0})$. Quindi basta trovare una base $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ per $\mathrm{Sol}(A^T, \overrightarrow{0})$. Dal fatto che $W \oplus W^\perp = V$ segue che $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ sia una base di V. Sia Q la matrice le cui colonne sono i vettori v_i. Allora $p_w(v_i) = v_i$ per $i \leq k$ (dato che i v_i sono in W) e $p_W(v_i) = \overrightarrow{0}$ per $i \geq k+1$. Quindi

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_W) = Q \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) Q^{-1}.$$

DEFINIZIONE 7.34. Sia V uno spazio vettoriale. Una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è detta *ortogonale* se per ogni i, j con $i \neq j$ abbiamo $v_i \cdot v_j = 0$. Una base ortogonale è detta *ortonormale* se $v_i \cdot v_i = 1$ per ogni i.

OSSERVAZIONE 7.35. Le basi ortogonali sono spesso utili nelle applicazioni. Per esempio sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di $\mathbf{R}^n$. Allora, per scrivere v come combinazione lineare, dobbiamo scrivere $v = \sum \lambda_i v_i$ e quindi dobbiamo determinare $\mathrm{Sol}(A, v)$, dove la matrice A ha i vettori v_i come colonne.

Se invece $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortogonale possiamo trovare $\varphi_B(v)$ in modo molto più semplice. Scriviamo $v = \sum \lambda_i v_i$. Allora $v \cdot v_j$ è facile da calcolare. Abbiamo infatti che

$$v \cdot v_j = \left(\sum \lambda_i v_i \right) \cdot v_j = \sum \lambda_i (v_i \cdot v_j) = \lambda_j v_j \cdot v_j.$$

Quindi

$$\lambda_j = \frac{v \cdot v_j}{v_j \cdot v_j}.$$

ESEMPIO 7.36. La base $\{(2,1), (-1,2)\}$ è una base ortogonale di $\mathbf{R}^2$. Se vogliamo scrivere $(5,3)$ come combinazione lineare dei due vettori troviamo che $\lambda_1 \frac{(5,3)\cdot(2,1)}{(2,1)\cdot(2,1)} = \frac{13}{5}$ e $\lambda_2 = \frac{(5,3)\cdot(-1,2)}{(-1,2)\cdot(-1,2)} = \frac{1}{5}$.

Quindi

$$(5,3) = \frac{13}{5}(2,1) + \frac{1}{5}(-1,2).$$

PROPOSIZIONE 7.37 (Metodo di Gram-Schmidt). *Sia* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base di un spazio vettoriale. Allora*

$$w_i = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{w_k \cdot v_i}{w_k \cdot w_k} w_k$$

è una base ortogonale di W.

DIMOSTRAZIONE. Siano $W_i = \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_i)$. Mostriamo adesso che per ogni i l'insieme $\{w_1, \ldots, w_i\}$ è una base di W_i.

Lo facciamo con induzione su i. Per $i = 1$ abbiamo che $v_1 \neq \overrightarrow{0}$ e che $w_1 = v_1$, quindi non c'è nulla da mostrare.

Per l'induzione assumiamo che $(w_1, \ldots w_{i-1})$ è una base ortogonale per W_{i-1}. Sia A la matrice con $w_1, \ldots, w_{i-1}$ come colonne. Allora la proiezione ortogonale di v_i su W_{i-1} è

$$P_{(W_i)}(v_i) = A(A^TA)^{-1}A^Tv_i.$$

La matrice A^Tv_i è una matrice $(i-1) \times 1$ con entrate $(A^Tv_i)_j = (w_j \cdot v_i)$. La matrice (A^TA) è la matrice formata da tutti i prodotti $w_i \cdot w_j$. Dal fatto che la base sia ortogonale troviamo che la matrice è diagonale con $(w_j \cdot w_j)$ sulla diagonale. Quindi $((A^TA)^{-1}A^Tv_i))_j = \frac{w_j \cdot v_i}{w_j \cdot w_j}$ e

$$P_{W_{i-1}}(v_i) = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{w_k \cdot v_i}{w_k \cdot w_k} w_k.$$

Quindi $w_i = v_i - P_{W_{i-1}}(v_i) \in W_{i-1}^{\perp}$. Usando induzione, troviamo che l'insieme $\{w_1, \ldots, w_i\}$ è un insieme ortogonale. Da mostrare è che una base di W_i. Chiaramente ogni w_k è una combinazione di $v_1, \ldots, v_k$, e quindi $\operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_i) \subset W_i$. Dal fatto che $\dim W_i = i$ segue che basta mostrare che $\{w_1, \ldots, w_i\}$ è linearmente indipendente.

Se w_i fosse $\overrightarrow{0}$ allora $v_i = P_{W_{i-1}}(v_i) \in W_{i-1}$. Dal fatto che $(v_1, \ldots, v_{i-1})$ è una base di $V_{i-1} = W_{i-1}$ seguirebbe che $\{v_1, \ldots, v_i\}$ è linearmente dipendente, una contraddizione col fatto che $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base di V. Quindi $w_i \neq \overrightarrow{0}$. Adesso prendiamo $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ tali che

$$\sum_{k=1}^{i} \lambda_k w_k = \overrightarrow{0}.$$

Per $j \in \{1, \ldots, i\}$ prendiamo il prodotto scalare con w_j. Otteniamo

$$0 = \overrightarrow{0} \cdot w_j = \left(\sum_{k=1}^{i} \lambda_k w_k\right) \cdot w_j = \sum_{k=1}^{i} \lambda_k (w_k \cdot w_j) = \lambda_j (w_j \cdot w_j)$$

Dal fatto che $w_j \neq \overrightarrow{0}$ segue che $w_j \cdot w_j \neq 0$ e $\lambda_j = 0$. Quindi $\{w_1, \ldots, w_j\}$ sono linearmente indipendente.

□

Esempio 7.38. La proiezione ortogonale soddisfa $P_W|_W = \mathrm{id}_W$ e $P_W|_{W^\perp} = 0$. Quindi $p_W(p_W(v)) = p_W(v)$.

La riflessione in W è definita da $R_W(v) = 2P_W(v) - v$. Quindi $R_W|_W = \mathrm{id}_W$ e $R_W|_{W^\perp} = -\mathrm{id}_{W^\perp}$.

Quindi $R_W(R_W(v)) = v$:

$$\begin{aligned}
R_W(R_W(v)) &= R_W(2P_W(v) - v) \\
&= 2(R_W(P_W(v))) - R_W(v) \\
&= 2(2P_W(P_W(v)) - P_W(v)) - (2P_W(v) - v) \\
&= 2(2P_W(v) - P_W(v)) - 2(P_W(v)) + w \\
&= 2P_W(v) - 2P_W(v) + w = w
\end{aligned}$$

Esempio 7.39. Sia $V = \operatorname{span}(x_1, x_2) \subset \mathbf{R}^2$. Allora

$$P_V(y_1, y_2) = \frac{(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2))}{x_1^2 + x_2^2}(x_1, x_2)$$

e

$$R_V(y_1, y_2) = 2\frac{(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2))}{x_1^2 + x_2^2}(x_1, x_2) - (y_1, y_2)$$

5. Isometrie

Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un endomorfismo. Siamo adesso interessati agli endomorfismi che conservino properietà geometriche. In particolare, vogliamo che v e la sua immagine $f(v)$ abbiano la stessa lunghezza e che per due vettori v, w il coseno dell'angolo tra v e w sia uguale al coseno dell'angolo tra $f(v)$ e $f(w)$. Questo equivale a chiedere che per ogni $v, w \in \mathbf{R}^n$

$$v \cdot w = f(v) \cdot f(w).$$

DEFINIZIONE 7.40. Un endomorfismo $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ è chiamato una *isometria* se per ogni $v, w \in \mathbf{R}^n$ abbiamo

$$v \cdot w = f(v) \cdot f(w).$$

Sia f un endomorfismo e A la sua matrice rispetto alla basa canonica. Allora $f(v) = Av$ e troviamo che

$$v^T w = v \cdot w$$

e

$$f(v) \cdot f(w) = (f(v))^T f(w) = (Av)^T Aw = v^T A^T Av = v^T (A^T A)w.$$

Quindi, se $A^T A = I_n$ allora f è un'isometria. Invece, se f è un'isometria troviamo che per e_i, e_j.

$$(I_n)_{i,j} = e_i \cdot e_j = e_i^T (A^T A) e_j = (A^T A)_{i,j}.$$

Otteniamo facilmente il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 7.41. *Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un endomorfismo. Allora f è una isometria se e solo se*

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)^T M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = I_n$$

DEFINIZIONE 7.42. Una matrice $A \in M_{n\times n}(K)$ è chiamata *ortogonale* se $A^T = A^{-1}$.

Quindi f è un'isometria se e solo se $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è ortogonale.

LEMMA 7.43. *Le colonne di una matrice ortogonale formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$*

DIMOSTRAZIONE. Siano $v_1, \dots, v_n$ le colonne di A. Allora $v_i \cdot v_j = v_i^T v_j$ è l'entrata della matrice $A^T A$ al posto (i, j).

Dal fatto che $A^T = A^{-1}$ segue che $A^T A = A^{-1} A = I_n$. Quindi $v_i \cdot v_j = 0$ per $i \neq j$ e $v_i \cdot v_i = 1$. □

LEMMA 7.44. *Una matrice ortogonale A ha $\det(A) \in \{-1, 1\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia A una matrice ortogonale. Allora

$$1 = \det(I_n) = \det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2,$$

quindi $\det(A) \in \{-1, 1\}$. □

ESEMPIO 7.45. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice 2×2 ortogonale. Allora le colonne formano una base ortonormale. Quindi il vettore corrispondente alla prima colonna ha lunghezza 1 e quindi $a^2 + c^2 = 1$. In particolare esiste un $\varphi \in \mathbf{R}$ tale che $a = \cos(\varphi),\ c = \sin(\varphi)$.

La seconda colonna dovrebbe essere ortogonale alla prima quindi $b\cos(\varphi) + d\sin(\varphi) = 0$. Allora $d = r\cos(\varphi)$ e $b = -r\sin(\varphi)$. Per avere che (c, d) è un vettore di lunghezza 1 abbiamo bisogno che

$$1 = b^2 + d^2 = r^2(\sin(\varphi))^2 + r^2\cos(\varphi))^2 = r^2.$$

Quindi $r = 1$ oppure $r = -1$. Quindi se A è ortogonale allora

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \text{ oppure } A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Adesso in entrambi i casi si può calcolare $A^T A$ e si trova che $A^T A = I_2$. Quindi queste matrici sono ortogonali.

Le matrici del primo tipo hanno determinante 1, quelle del secondo tipo hanno determinante -1. Quelle del primo tipo sono le rotazioni di angolo φ.

Il polinomio caratteristico delle matrici del secondo tipo è $t^2 - 1$. Quindi gli autovalori sono 1 e -1. La matrice è simmetrica. Nella prossima sezione mostreremo che i due autovettori sono ortogonali. Quindi A è la matrice di una riflessione ortogonale rispetto ad una retta ℓ. Un calcolo mostra che $\ell = \mathrm{span}(\cos(-\varphi/2), \sin(-\varphi/2))$.

6. Teorema spettrale

Sia A una matrice $n \times n$ simmetrica reale, quindi una matrice associata ad una forma bilineare simmetrica. Enunciamo prima il seguente lemma preliminare che fa parte della dimostrazione del Teorema Spettrale.

LEMMA 7.46. *Il polinomio caratteristico di A è un prodotto di fattori lineari.*

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che per ogni matrice reale il polinomio caratteristico associato è un prodotto di fattori lineari su $\mathbf{C}$. Sia adesso $\lambda \in \mathbf{C}$ un autovalore di A e $v \in \mathbf{C}^n$ un autovettore. Allora $Av = \lambda v$. Denotiamo con $\overline{z}$ il coniugato complesso di z. Adesso abbiamo che

$$\overline{v}^T Av = \overline{v}^T \lambda v = \lambda(\overline{v}^T v)$$

e, utilizzando prima che $A = A^T$ e poi che $A = \overline{A}$,

$$\overline{v}^T Av = \overline{v}^T (A)^T v = \overline{v}^T \overline{(A)^T} v = \overline{(Av)^T} v = \overline{\lambda v^T} v = \overline{\lambda} \overline{v}^T v.$$

Quindi troviamo che $\overline{\lambda}\overline{v}^T \cdot v = \lambda \overline{v}^T \cdot v$. Quindi $\overline{v}^T.v = 0$ oppure $\lambda = \overline{\lambda}$. Nel secondo caso abbiamo che $\lambda \in \mathbf{R}$. Ci basta quindi escludere il primo caso.

Sia $v = (z_1, \dots, z_n)\mathbf{C}^n$ allora $\overline{v}^T.v = \sum_{i=1} \overline{z_i} z_i = \sum_{i=1}^n |z_i|^2$. Questa somma è zero se e solo se $z_i = 0$ per ogni i. Dal fatto che $v \neq \overrightarrow{0}$ segue che questo non sia il caso e $\lambda = \overline{\lambda}$. Quindi $\lambda \in \mathbf{R}$. □

TEOREMA 7.47 (Teorema spettrale). *L'endomorfismo di $\mathbf{R}^n$ associato alla matrice A ha una base ortonormale di autovettori.*

DIMOSTRAZIONE. Lo dimostriamo per induzione su n. Per $n = 1$ non c'è nulla da mostrare.

Sia λ autovalore. Allora esiste un autovettore $v_1 \in \mathbf{R}^n$. Lo possiamo normalizzare in modo che $\|v_1\| = 1$. Sia adesso $\{v_1, w_2, \dots, w_n\}$ una base di $\mathbf{R}^n$ che contenga v_1. Se applichiamo Gram-Schmidt troviamo una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ che contiene v_1.

La matice $Q^T Q$ contiene tutti i prodotti scalari $v_i \cdot v_j$. Essendo una base ortonormale troviamo $Q^T Q = I_n$. Quindi $Q^{-1} = Q^T$.

Adesso la matrice $B = Q^{-1}AQ$ è simile ad A. Inoltre $B^T = (Q^{-1}AQ)^T = (Q^T AQ)^T = Q^T A^T (Q^T)^T = Q^T AQ = Q^{-1}AQ = B$. Quindi B è simmetrica.

La prima colonna di B è

$$Q^{-1}AQe_1 = Q^{-1}Av = Q^{-1}\lambda v = \lambda Q^{-1} v = \lambda e_1$$

Quindi la prima colonna contiene un elemento non zero al posto $(1, 1)$ ed il resto è zero. Usando che B è simmetrica implica che anche il resto della prima riga sia zero,

$$B = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

La matrice A' è una matrice simmetrica che quindi ammette una base ortonormale (per induzione) $\{v_2', \dots, v_n'\}$, con $v_i' \in \mathbf{R}^{n-1}$. Adesso $\{e_1, (0, v_2'), (0, v_3'), \dots, (0, v_n')$ è una base ortonormale di autovettori di B. Quindi la matrice Q' associata a questa base è una matrice di autovettori. Otteniamo quindi una matrice ortogonale $R = QQ'$ tale che $R^T AR$ sia diagonale. $\square$

Esempio 7.48. La matrice
$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$
ha polinomio caratteristico $t^2 - (a+c)t + ac - b^2$. Gli autovalori sono
$$\frac{a + c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac - b^2)}}{2} = \frac{a + c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$
Se $a \neq c$ o $b \neq 0$ ci sono due autovalori reali. Nel caso $a = c$, $b = 0$, la matrice è già diagonale.

Esempio 7.49. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare, se esiste, N ortogonale tale che $D = N^t AN$ sia diagonale.
(2) Determinare, se esiste, P invertibile e non ortogonale tale che $D' = P^{-1}AP$ sia diagonale.

Osservazione 7.50. Il teorema spettrale ci permette di studiare in modo semplificato le forme bilineari simmetriche su $\mathbf{R}^n$. In particolare la forma diagonale fornisce tutte le informazioni di positività per la forma bilineare.

Sia g una forma bilineare simmetrica, allora la sua matrice è una matrice simmetrica. Quindi esiste una base ortonormale di autovettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbf{R}^n$ tale che
$$D = Q^{-1}AQ = Q^T AQ$$
è diagonale. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori associati agli autovettori $\{v_1, \dots, v_n\}$. Considerando $v = \sum x_i v_i$, troviamo che $g(v, v) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$.

Possiamo facilmente concludere che g è semidefinita positiva se $\lambda_i \geq 0$ per ogni i, è definita positiva se per $\lambda_i > 0$ per ogni i. Similmente, sarà (semi)defininita negativa se soddisfa le condizioni $\lambda_i < 0$ ($\lambda_i \leq 0$) per ogni i.

Sarà una forma indefinita se esistono i, j tali che $\lambda_i < 0$ e $\lambda_j > 0$.

Esempio 7.51. Si consideri la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
associata alla forma bilineare $g : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. Si classifichi la forma g.

Allora con lo sviluppo di Laplace troviamo che il polinomio caratteristico è
$$-t^3 + 6t^2 - 9t + 2$$
Si controlla facilmente che $t = 2$ è un zero. La divisione per $(2 - t)$ risulta in
$$-t^3 + 6t^2 - 9t + 2 = (2 - t)(t^2 - 4t + 1)$$
Quindi gli altri due autovalori sono $2 \pm \sqrt{3}$.

Osservazione 7.52. Adesso cerchiamo che cosa succede quando applichiamo cambiamenti di base non ortogonali. Cominciando con una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ tale che la matrice sia diagonale, possiamo adesso definire
$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i^2}} v_i & \text{se } \lambda_i \neq 0 \\ v_i & \text{se } \lambda_i = 0 \end{cases}$$

Allora la matrice rispetto a questa base ha soltanto entrate $0, -1, 1$. Il numero di entrate uguale a 1 corrisponde al numero di λ_i positivi e il numero di entrate uguale a -1 corrisponde al numero di λ_i negativi.

7. Forme hermitiane su $\mathbf{C}^n$*

Le forme bilineari simmetriche su $\mathbf{C}^n$ non hanno buone properietà come quelle di $\mathbf{R}^n$. Per esempio ogni forma bilineare simmetrica ammette un vettore $v \in \mathbf{C}^n$ tale che $g(v, v) = 0$ e $v \neq \overrightarrow{0}$. Per avere una teoria più simile a quella su $\mathbf{R}^n$ si studiano maggiormente le forme sesquilineari.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{C}$. Una forma sesquilineare è una funzione $h : V \times V \to \mathbf{C}$ tale che $h(u + \lambda v, w) = h(u, w) + \lambda h(v, w)$, ma $h(u, v + \lambda w) = h(u, v) + \overline{\lambda} h(u, w)$. Una forma sesquilineare è chiamata hermitiana se $h(u, v) = \overline{h(v, u)}$.

L'esempio standard su $\mathbf{C}^n$ è

$$h((z_1, \ldots, z_n), (w_1, \ldots, w_n)) = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}.$$

Per questo forma sesquilineare possiamo trovare risultati analoghi a quelli ottenuti per forme bilineari reali.

(1) Se $W \subset \mathbf{C}^n$ è un sottospazio e h la forma hermitiana standard allora lo spazio
$$W^\perp = \{v \in \mathbf{C}^n \mid h(v, w) = 0 \text{ per ogni } w \in W\}$$
ha dimensione $n - \dim W$ e $W^\perp \cap W = \{\overrightarrow{0}\}$.
(2) Ad ogni forma sesquilineare h e base B, possiamo associare una matrice A tale che $h(v, w) = \varphi_B(v)^T A \overline{\varphi_B(w)}$. Se h è hermitiana allora la matrice è anche hermitiana, cioè, $\overline{A} = A^T$.
(3) Ogni matrice Hermitiana ha solo autovalori reali.
(4) Ogni matrice Hermitiana è diagionalizzabile su $\mathbf{C}$ ed esiste una base di autovettori di $\mathbf{C}^n$ che sono ortogonali rispetto al prodotto hermitiano standard.
(5) Per ogni forma sesquilineare abbiamo $h(v, v) \in \mathbf{R}$ per ogni $v \in \mathbf{C}^n$. In particolare, possiamo parlare di forme definite positive, negative, indefinite, semidefinite negative e semidefininite positive. Possiamo inoltre determinare queste properietà dagli autovalori di A.

8. Spazio delle funzioni lineari e spazio duale*

Siano V, W spazi vettoriali. Allora possiamo considerare l'insieme di tutte le funzioni lineari.

$$\mathrm{Mor}(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ funzione lineare}\}$$

Tale spazio ammette un'operazione di somma, definita da $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$. Ammette inoltre l'operazione di prodotto con uno scalare, definito da $(\lambda f)(v) := \lambda f(v)$. A questo punto è quasi scontato aspettarsi il seguente risultato.

Lemma 7.53. *L'insieme* $\mathrm{Mor}(V, W)$ *è un spazio vettoriale.*

Dimostrazione. Lasciata al lettore per esercizio.

□

Se V e W hanno dimensione finita, (siano ad esempio $n = \dim V, m = \dim W$) allora possiamo identificare $\mathrm{Mor}(V, W)$ con l'insieme $M_{m \times n}(K)$. Questa identificazione dipende dalla scelta di basi B, B' per V e W. La mappa insiemistica è definita da $f \mapsto M_B^{B'}(f)$.

Si controlla facilmente che la mappa $\mathrm{Mor}(V, W) \to M_{m\times n}(K)$ è lineare. Inoltre è biiettiva.

Consideriamo ora il caso particolare in cui lo spazio vettoriale W abbia dimensione 1. Per questa seconda parte considereremo $K = \mathbf{R}$.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ di dimensione finita. Sia $f : V \to \mathbf{R}$ una funzione lineare. Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Allora f è determinata dalla matrice di f che è una matrice $1 \times n$. Abbiamo quindi una mappa

$$\mathrm{Mor}(V, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}^n$$

(che dipende da B) definita da

$$f \mapsto (f(v_1), \dots, f(v_n)).$$

Consideriamo ora $e_1, \dots, e_n$, la base canonica di $\mathbf{R}^n$ e sia "$\cdot$" un prodotto scalare su $\mathbf{R}^n$. Ad ognuno dei vettori della base è possibile associare un elemento di $\mathrm{Mor}(V, \mathbf{R})$. Sia e_i un elemento della base canonica, definiamo la mappa che associa un vettore al prodotto scalare con e_i,

$$g_i : v \mapsto v \cdot e_i.$$

Lemma 7.54. *L'insieme di applicazioni lineari* $(g_1, \dots, g_n)$ *è una base dello spazio vettoriale* $\mathrm{Mor}(V, \mathbf{R})$.

Dimostrazione. Sia $f : V \to \mathbf{R}$ un'applicazione lineare e siano $c_i = f(e_i)$. Possiamo quindi considerare l'applicazione lineare

$$h = \sum c_i g_i,$$

dove f ed h sono due funzioni $V \to \mathbf{R}$. Abbiamo che

$$h(e_j) = (\sum c_i g_i)(e_j) = \sum c_j(g_i(e_j)) = c_j = f(e_j)$$

Quindi f e h coincidono se calcolate rispetto ad una base di V e quindi sono uguali.

Inoltre se $\sum \lambda_i g_i = 0$ allora per ogni $v \in \mathbf{R}^n$ troviamo

$$\sum \lambda_i g_i(v) = 0$$

Se $v = e_j$ allora $g_i(e_j) = 0$ per $i \neq j$ e troviamo

$$\lambda_j = \lambda_j g_j(e_j) = 0,$$

ottenendo quindi che l'insieme considerato è linearmente indipendente, e quindi una base. □

Quindi per ogni $v \in \mathbf{R}^n$ otteniamo una mappa $v^* : w \mapsto w \cdot v$, che induce un morfismo $V \to \mathrm{Mor}(V, \mathbf{R})$. Applicando tale morfismo ad una base di V otteniamo una base dello spazio $\mathrm{Mor}(V, \mathbf{R})$, anche denotato V^*, lo spazio duale di V.

Esempio 7.55. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e sia V^* lo spazio vettoriale duale. Dati v^*, $w^* \in V^*$, consideriamo l'applicazione

$$\begin{array}{rrl} v^* \otimes w^* : & V \times V \to & \mathbf{R} \\ & (x, y) \mapsto & (v^*(x))(w^*(y)) \end{array}$$

chiamata *prodotto tensoriale*. Tale applicazione è una forma bilineare su $\mathbf{R}^n$.

9. Prodotto vettoriale

Sia $V = \mathbf{R}^n$. Prendiamo $v_1, \ldots, v_{n-1}$ vettori in $\mathbf{R}^n$.

Allora la funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ data da

$$f(v) = \det(v_1, \ldots, v_{n-1}, v)$$

è lineare.

Quindi $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Abbiamo visto che le funzioni $v \mapsto v \cdot e_i$ formano una base di $\mathrm{Mor}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. In particolare, per ogni $g \in \mathrm{Mor}(V, \mathbf{R})$ esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che

$$g(v) = \sum \lambda_i (e_i \cdot v) = \left(\sum \lambda_i e_i\right) \cdot v$$

per ogni $v \in \mathbf{R}^n$. Cioè esiste un $w \in \mathbf{R}^n$ tali che $g(v) = w \cdot v$ per ogni $v \in \mathbf{R}^n$.

Definizione 7.56. Siano $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbf{R}^n$. Allora il *prodotto vettoriale* di $v_1, \ldots, v_{n-1}$, denotato con $v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$ è l'unico vettore in $\mathbf{R}^n$ tale che, per ogni $v \in \mathbf{R}^n$, si abbia

$$\det(v_1, \ldots, v_{n-1}, v) = (v_1 \times \cdots \times v_{n-1}) \cdot v$$

Lemma 7.57. *Sia A la matrice avente come colonne i vettori $v_1 \ldots, v_{n-1}$. Sia $A^{(i)}$ la matrice ottenuta da A togliendo la riga i. Allora*

$$(v_1 \times \cdots \times v_{n-1})_i = (-1)^{i+n} \det(A^{(i)})$$

Dimostrazione. Sia B_i la matrice quadrata avente come colonne i vettori $v_1, \ldots, v_{n-1}, e_i$, e sia $w = v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$. Allora, da un lato abbiamo che

$$w_i = e_i \cdot w = f(e_i)$$

e dalla definizione di f segue che

$$f(e_i) = \det(B_i).$$

Possiamo calcolare $\det(B_i)$ tramite lo sviluppo di Laplace lungo l'ultima colonna e troviamo

$$\det(B_i) = (-1)^{i+n} \det((B_i)^{i,n}) = (-1)^{i+n} \det(A^{(i)})$$

(dato che l'ultima colonna di B_i ha un'unica entrata diversa da 0.) Quindi

$$(v_1 \times \cdots \times v_{n-1})_i = w_i = \det(B_i) = (-1)^{i+n} \det(A^{(i)}).$$

□

Lemma 7.58. *Siano $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbf{R}^n$. Allora*

$$(v_1 \times \cdots \times v_{n-1}) \cdot v_i = 0$$

per ogni $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Dimostrazione. Dalla definizione segue che

$$(v_1 \times \cdots \times v_{n-1}) \cdot v_i = \det(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_i).$$

Dal fatto che la matrice ha due colonne identiche segue che il determinante è zero e quindi

$$(v_1 \times \cdots \times v_{n-1}) \cdot v_i = 0.$$

□

Lemma 7.59. *Siano $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbf{R}^n$. Allora $v_1 \times \cdots \times v_{n-1} = \overrightarrow{0}$ se e solo se $v_1, \ldots, v_{n-1}$ sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. Se $v_1, \dots, v_{n-1}$ sono linearmente dipendenti allora

$$\det(v_1, \dots, v_{n-1}, v) = 0$$

per ogni v. Quindi $v \cdot (v_1 \times \cdots \times v_{n-1}) = 0$ per ogni $v \in \mathbf{R}^n$ e quindi $v_1 \times \cdots \times v_{n-1} = \overrightarrow{0}$.

Se $v_1, \dots, v_{n-1}$ sono linearmente indipendenti, allora esiste un

$$v \in \mathbf{R}^n \setminus \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Quindi $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v\}$ sono linearmente indipendenti e

$$f(v) = \det(v_1, \dots, v_{n-1}, v) \neq 0.$$

Da cui otteniamo che anche $v \cdot (v_1 \times \cdots \times v_{n-1}) \neq 0$, quindi $v_1 \times \cdots \times v_{n-1} \neq \overrightarrow{0}$. □

Osservazione 7.60. Abbiamo visto che $v_1 \times \cdots \times v_{n-1} \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{n-1})^{\perp}$. Inoltre, se $v_1 \dots, v_{n-1}$ sono linearmente indipendenti allora $v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$ è una base di $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_{n-1})^{\perp}$.

Definizione 7.61. Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori in $\mathbf{R}^n$ allora *il parallelepipedo generato da* $v_1, \dots, v_n$, notato con $P(v_1, \dots, v_n)$, è l'insieme

$$\{t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n \mid 0 \leq t_i \leq 1\}.$$

Diremo che i vettori $v_1 \dots, v_n$ linearmente indipendente hanno *orientamento positivo* (rispettivamente *orientamento negativo*) se $\det(v_1, \dots, v_n)$ è positivo (rispettivamente negativo). Ovvero $v_1 \dots, v_n$ è equi-orientata con la base canonica se $\det(v_1, \dots, v_n)$ è positivo.

In $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$ si può introdurre il concetto di volume orientato. Dati v_1, v_2 in $\mathbf{R}^2$ il volume orientato è pari all'area di $P(v_1, v_2)$ (parallelogramma generato da v_1, v_2) se v_1, v_2 hanno orientatamento positivo; mentre vale l'opposto dell'area di $P(v_1, v_2)$ se v_1, v_2 hanno orientamento negativo. È chiaro che il volume orientato dalla basa canonica è 1, e se $v_1 = v_2$ allora il volume è zero. Inoltre il volume orientato è bilineare.

Similmente in $\mathbf{R}^3$ dati tre vettori v_1, v_2, v_3 il loro volume orientato è il volume del parallelepipedo $P(v_1, v_2, v_3)$ se i vettori hanno orientamento positivo, altrimenti è l'opposto del volume di $P(v_1, v_2, v_3)$ se i vettori hanno orientamento negativo. Anche in questo case il volume orientato è multilineare alternante ed il volume orientato della base canonica è 1.

Definizione 7.62. Il *volume orientato n-dimensionale* è la funzione

$$\operatorname{vol}_n : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

che è multilineare, alternante e prende il valore 1 sulla base canonica.

Nel capitolo sui determinanti abbiamo visto che questa funziona è unica ed è il determinante. Quindi $\operatorname{vol}_n(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n)$.

Proposizione 7.63. *Siano* $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbf{R}^n$. *Allora il volume* $n-1$*-dimensionale (non-orientato) del parallelepipedo generato da* $v_1, \dots, v_{n-1}$ *è uguale a*

$$\|v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_{n-1}\|$$

Dimostrazione. Se $v_1, \dots, v_{n-1}$ sono linearmente dipendenti, allora $v_1 \times \cdots \times v_{n-1} = \overrightarrow{0}$ e il volume è zero, quindi siamo a posto.

Assumiamo adesso che $v_1, \dots, v_{n-1}$ siano linearmente indipendenti, e sia $w = v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$.

Allora w è ortogonale su $v_1, \dots, v_{n-1}$. Prendiamo $v_n = \frac{1}{\|w\|} w$.

Allora il volume $n-1$-dimensionale del parallelepipedo generato da $v_1, \ldots, v_{n-1}$ è il volume n-dimensionale del parallelepipedo generato da $v_1, \ldots, v_{n-1}$ e un ulteriore vettore ortogonale su i v_i e di lunghezza 1. Quindi

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_{n-1}(P(v_1, \ldots, v_{n-1})) &= \mathrm{vol}_n(P(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)) \\ &= \det(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n) = w \cdot v_n \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza viene dalla definizione del prodotto vettoriale.

Adesso

$$w \cdot v_n = \frac{w \cdot w}{\|w\|} = \frac{\|w\|^2}{\|w\|} = \|w\|.$$

□

Esempio 7.64. Adesso consideriamo il caso $\mathbf{R}^3$.

Siano $v = (x_1, x_2, x_3), w = (y_1, y_2, y_3)$ due vettori $\mathbf{R}^3$. Allora il prodotto vettoriale $v \times w$ è

$$\begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

Esempio 7.65. Consideriamo ad esempio i vettori $v_1 = (1,2,3)^T$, $v_2 = (1,0,1)^T$ e $v_3 = (-1,0,-1)^T$. Allora $v_1 \times v_2 = (2,2,-2)$, con $\|(2,2,-2)\| = 2\sqrt{3}$ e $v_2 \times v_3 = (0,0,0)$ con $\|(0,0,0)\| = 0$.