Supporto alla didattica 8 - 14-18/12/2020 - Soluzioni

Esercizio 1

Sia $V = \mathbf{M}_{2\times 2}(\mathbf{R})$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $f(A, B) = \mathrm{tr}\left(A^T M B\right)$ con $A, B \in V$.

(a) Siano $\lambda \in \mathbf{R}$, $A_1, A_2, B_1, B_2 \in V$. Calcoliamo:

$$\begin{aligned} f(A_1 + \lambda A_2, B) &= \mathrm{tr}\left((A_1 + \lambda A_2)^T MB\right) = \mathrm{tr}\left(\left(A_1^T + \lambda A_2^T\right) MB\right) = \\ &= \mathrm{tr}\left(A_1^T MB + \lambda A_2^T MB\right) = \mathrm{tr}\left(A_1^T MB\right) + \lambda \mathrm{tr}\left(A_2^T MB\right) = \\ &= f(A_1, B) + \lambda f(A_2, B); \end{aligned}$$

dove abbiamo usato, nell'ordine, le proprietà della trasposizione matriciale, il fatto che il prodotto distribuisce le somme nell'anello delle matrici e la linearità dell'applicazione traccia $\mathrm{tr} : V \to \mathbf{R}$. La linearità nel secondo argomento

$$f(A, B_1 + \lambda B_2) = f(A, B_1) + \lambda f(A, B_2)$$

è un calcolo analogo che utilizza le medesime proprietà.

(b) Consideriamo la base canonica E di V fornita dalle matrici elementari. Con e_{ij} indichiamo la matrice con l'entrata di posto (i, j) uguale a 1 e tutte le altre entrate nulle. Abbiamo dunque $E = (v_1 = e_{11}, v_2 = e_{12}, v_3 = e_{21}, v_4 = e_{22})$, con

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora la matrice della forma bilineare è $\Gamma_f^E = (f_{ij})_{i,j}$, dove $f_{ij} = f(v_i, v_j)$ per $1 \leq i, j \leq 4$. Abbiamo dunque:

$$f_{ij} = \mathrm{tr}\left(v_i^T M v_j\right) \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq 4.$$

È possibile effettuare i sedici calcoli, oppure osservare che il prodotto di due matrici elementari è: $e_{kl} e_{pq} = \delta_l^p e_{kq}$ dove δ_l^p è il "delta di Kronecker", così definito:

$$\delta_l^p = \begin{cases} 0 & \text{se } l \neq p, \\ 1 & \text{se } l = p. \end{cases}$$

In sostanza, il prodotto di due matrici elementari è la matrice nulla, a meno che l'indice di colonna della prima (l) sia uguale all'indice di riga della seconda (p): in tal caso si ottiene la matrice elementare corrispondente alle entrate (k, q) (stessa riga del primo fattore, stessa colonna del secondo fattore).

Riscriviamo $M \in V$ come combinazione lineare a coefficienti reali della base canonica B:

$$M = \sum_{1 \leq r, s \leq 2} m_{rs} e_{rs}.$$

Siano $v_i = e_{kl}$, $v_j = e_{pq}$, allora, usando la linearità e la regola per il prodotto di matrici elementari, possiamo calcolare:

$$\begin{aligned} v_i^T M v_j &= e_{kl}^T M e_{pq} = e_{lk} M e_{pq} = \\ &= e_{lk} \sum_{1 \le r,s \le 2} m_{rs} e_{rs} e_{pq} = e_{lk} \sum_{1 \le r,s \le 2} m_{rs} \delta_s^p e_{rq} = \\ &= e_{lk} \sum_{1 \le r \le 2} m_{rp} e_{rq} = \sum_{1 \le r \le 2} m_{rp} e_{lk} e_{rq} = \sum_{1 \le r \le 2} m_{rp} \delta_k^r e_{lq} = \\ &= m_{kp} e_{lq}. \end{aligned}$$

Abbiamo trovato il multiplo di una matrice elementare. Essendo interessati alla traccia di tale matrice, dobbiamo distinguere tra i due casi in cui l'entrata non nulla giaccia (o meno) sulla diagonale.

$$\operatorname{tr}\left(v_i^T M v_j\right) = \operatorname{tr}\left(e_{kl}^T M e_{pq}\right) = \operatorname{tr}\left(m_{kp} e_{lq}\right) = \begin{cases} m_{kp} & \text{se } l = q, \\ 0 & \text{se } l \neq q. \end{cases}$$

Si noti che in questo Esercizio gli indici k, l, p, q variano in $\{1, 2\}$, ma quanto osservato finora è vero in generale, per matrici quadrate di ordine $n \in \mathbf{N}$.

Ora è sufficiente sostituire agli indici k, l, p, q i valori $1, 2$ prestando attenzione alle entrate corrispondenti per calcolare la matrice Γ_f^E. Si ottiene:

$$\Gamma_f^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2

Siano $u, v, w \in \mathbf{R}^4$ e $\lambda \in \mathbf{R}$:

- $g(w, v) = 3w_1v_1 + 3w_2v_2 + w_3v_3 + w_4v_4 - \sqrt{2}w_2v_3 - \sqrt{2}w_3v_2 + w_2v_4 + w_4v_2 = 3v_1w_1 + 3v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4 - \sqrt{2}v_3w_2 - \sqrt{2}v_2w_3 + v_4w_2 + v_2w_4 = g(v, w)$ dunque g è simmetrica.

- $g(u + \lambda v, w) = 3(u_1 + \lambda v_1)w_1 + 3(u_2 + \lambda v_2)w_2 + (u_3 + \lambda v_3)w_3 + (u_4 + \lambda v_4)w_4 - \sqrt{2}(u_2 + \lambda v_2)w_3 - \sqrt{2}(u_3 + \lambda v_3)w_2 + (u_2 + \lambda v_2)w_4 + (u_4 + \lambda v_4)w_2 = 3u_1w_1 + 3u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4 - \sqrt{2}u_2w_3 - \sqrt{2}u_3w_2 + u_2w_4 + u_4w_2 + \lambda(3v_1w_1 + 3v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4 - \sqrt{2}v_2w_3 - \sqrt{2}v_3w_2 + v_2w_4 + v_4w_2) = g(u, w) + \lambda g(v, w)$ dunque g è lineare nella prima componente.

- La simmetria e la linearità di g nella prima componente implicano:

  $$g(u, v + \lambda w) = g(v + \lambda w, u) = g(v, u) + \lambda g(w, u) = g(u, v) + \lambda g(u, w),$$

  dunque g è lineare anche nella seconda componente.

Questo dimostra che $g : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ è una forma bilineare simmetrica; ci resta da determinare se g è un prodotto scalare o no, ovvero se per ogni $v \in \mathbf{R}^4$ non nullo vale $g(v,v) > 0$ oppure no.

Sia $E := \{e_1, \dots, e_4\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^4$, e sia N_g^E la matrice di g rispetto alla base E (ovvero la matrice avente come elemento (i,j)-esimo $g(e_i, e_j)$): se un vettore $v \in \mathbf{R}^4$ ha come vettore delle coordinate rispetto ad E il vettore $c_v^E := \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix}$, allora $g(v,v) = (c_v^E)^t N_g^E c_v^E$. Se N_g^E fosse diagonale, con elementi $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ sulla diagonale, otterremmo $g(v,v) = (c_v^E)^t N_g^E c_v^E = \lambda_1 \mu_1^2 + \cdots + \lambda_4 \mu_4^2$; potremmo in tal caso decidere se g è un prodotto scalare o meno studiando il segno dei λ_i: se sono tutti positivi, g è un prodotto scalare, altrimenti no (se per esempio $\lambda_1 \leq 0$, scegliendo come v il vettore di coordinate $(1,0,0,0)^t$ rispetto ad E otterremmo $g(v,v) = \lambda_1 \leq 0$). Calcoliamo allora N_g^E:

$$
\begin{array}{llll}
g(e_1,e_1) = 3 & g(e_1,e_2) = g(e_2,e_1) = 0 & g(e_1,e_3) = g(e_3,e_1) = 0 & g(e_1,e_4) = g(e_4,e_1) = 0 \\
g(e_2,e_2) = 3 & g(e_2,e_3) = g(e_3,e_2) = -\sqrt{2} & g(e_2,e_4) = g(e_4,e_2) = 1 & \\
g(e_3,e_3) = 1 & g(e_3,e_4) = g(e_4,e_3) = 0 & & \\
g(e_4,e_4) = 1 & & &
\end{array}
$$

Osserviamo che la simmetria di g costringe N_g ad essere simmetrica rispetto a qualunque base. Otteniamo

$$
N_g^E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

N_g^E purtroppo non è diagonale; per poter applicare il metodo esposto in precedenza, però, potremmo considerare (se esiste) una diversa base B di $\mathbf{R}^4$, una rispetto alla quale N_g^B sia diagonale, ovvero potremmo (se possibile) diagonalizzare N_g^E in $\mathbf{R}$ e studiarne gli autovalori.

Il polinomio caratteristico di N_g^E è (omettiamo i conti) $p(t) = t(t-1)(t-3)(t-4)$, quindi abbiamo 4 autovalori reali distinti, cosa che garantisce la diagonalizzabilità di N_g^E in $\mathbf{R}$. Visto che uno degli autovalori è 0, la discussione precedente ci permette di concludere che g non è un prodotto scalare.

Esercizio 3

Supponiamo che $v \cdot w = 0$. Sia $\lambda \in \mathbf{R}$; per la Proposizione 7.4 delle note, abbiamo che

$$
\|v + \lambda w\|^2 = \|v\|^2 + \|\lambda w\|^2 + 2\lambda(v \cdot w) = \|v\|^2 + \|\lambda w\|^2 \geq \|v\|^2,
$$

poiché $\|\lambda w\|^2 \geq 0$. Ciò implica che $\|v\| \leq \|v+\lambda w\|$, quindi un'implicazione è dimostrata.

Mostriamo ora l'altra implicazione. Supponiamo che $\|v\| \leq \|v+\lambda w\|$ per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ e procediamo per assurdo. Assumiamo quindi che $v \cdot w \neq 0$. Usando di nuovo la Proposizione 7.4, abbiamo che

$$\|v\|^2 \leq \|v+\lambda w\|^2 = \|v\|^2 + \|\lambda w\|^2 + 2\lambda(v \cdot w)$$

da cui deduciamo che

$$\|\lambda w\|^2 + 2\lambda(v \cdot w) \geq 0.$$

Se $\lambda \neq 0$, allora possiamo dividere per λ^2 ottenendo

$$\|w\|^2 + \frac{2}{\lambda}(v \cdot w) \geq 0.$$

Questa disuguaglianza vale in particolare per

$$\lambda = -\frac{v \cdot w}{\|w\|^2},$$

dato che $v \cdot w \neq 0$ (notiamo anche che $\|w\|^2 \neq 0$, poiché altrimenti avremmo $w = 0$ e quindi $v \cdot w = 0$). Dunque otteniamo

$$\|w\|^2 - 2\|w\|^2 = -\|w\|^2 \geq 0,$$

che è un assurdo.

Esercizio 4

Abbiamo $U := \operatorname{span}\left\{ u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, u_2 := \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbf{R}^4$ e, per definizione, $U^\perp := \{v \in \mathbf{R}^4 | v \cdot u = 0 \text{ per ogni } u \in U\}$. Visto che U è scritto come span di vettori, possiamo scrivere $U^\perp = \{v \in \mathbf{R}^4 | v \cdot u_1 = v \cdot u_2 = 0\}$; se scriviamo un vettore $v \in \mathbf{R}^4$ qualsiasi come $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, otteniamo

$$U^\perp = \left\{ v \in \mathbf{R}^4 \middle| \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ -5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

cioè l'espressione di $U^\perp$ in forma cartesiana. Visto però che dobbiamo trovare una base ortogonale per $U^\perp$ dobbiamo trovare la sua espressione in forma parametrica. Abbiamo $U^\perp = Sol(A, \vec{0})$ dove $A \in M_{2\times 4}(\mathbf{R})$ è la matrice avente per righe i vettori u_1 e u_2; per trovare $U^\perp$ riduciamo a scala la matrice completa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 0 \\ -5 & 4 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 14 & 18 & -18 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & -9 & 0 \end{array}\right)$$

La seconda riga dà $x_2 = \frac{9}{7}(-x_3 + x_4)$ e sostituendo nella prima troviamo (svolgendo i conti) $x_1 = \frac{1}{7}(-3x_3 + 10x_4)$; di conseguenza

$$U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{7}(-3x_3 + 10x_4) \\ \frac{9}{7}(-x_3 + x_4) \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_3, x_4 \in \mathbf{R}^4 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 \middle| x_3, x_4 \in \mathbf{R}^4 \right\}$$

Scegliendo $x_3 = x_4 = 7$ (così abbiamo solo coefficienti interi) otteniamo $U^\perp = \operatorname{span}\left\{ u_3 := \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, u_4 := \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$. Adesso dobbiamo ortogonalizzare le basi $\{u_1, u_2\}$ di U e $\{u_3, u_4\}$ di $U^\perp$ usando Gram-Schmidt.

- Se scegliamo $w_1 := u_1$, una base ortogonale di U è data da $\{w_1, w_2\}$ dove $w_2 := u_2 - \frac{u_2 \cdot u_1}{||u_1||^2} u_1$ (o un multiplo di questo vettore); visto che $||u_1||^2 = 30$ e $u_2 \cdot u_1 = 4$, otteniamo

$$U = \operatorname{span}\left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{15} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} =$$
$$= \operatorname{span}\left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -77 \\ 56 \\ 39 \\ 38 \end{pmatrix} \right\}$$

- Se scegliamo $w_3 := u_3$, una base ortogonale di $U^\perp$ è data da $\{w_3, w_4\}$ dove $w_4 := u_4 - \frac{u_4 \cdot u_3}{||u_3||^3} u_3$ (o un multiplo di questo vettore); visto che $||u_3||^2 = 139$ e $u_4 \cdot u_3 = -111$, otteniamo

$$U^{\perp} = \text{span}\left\{ w_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{111}{139}\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \text{span}\left\{ w_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1057 \\ 252 \\ 777 \\ 973 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 5

Per prima cosa determiniamo la matrice di g rispetto alla base canonica $E := \{e_1, e_2, e_3\}$, cioè M_g^E:

$$\begin{array}{lll} g(e_1, e_1) = 1, & g(e_1, e_2) = g(e_2, e_1) = 1, & g(e_1, e_3) = g(e_3, e_1) = 0, \\ g(e_2, e_2) = 2, & g(e_2, e_3) = g(e_3, e_2) = 1, & g(e_3, e_3) = 1. \end{array}$$

Dunque detta $A := M_g^E$ otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per determinare la positività di g basta studiare gli autovalori di A. Abbiamo

$$p_A(t) := \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} = t(1-t)(t-3)$$

A ha dunque due autovalori positivi e uno nullo, e quindi g è semidefinita positiva.