Soluzioni Tutorato 10

(1) (a) Si calcoli, usando il determinante, l'area del triangolo con vertici $(1,2),(7,2)$ e $(3,6)$.

(b) Si calcoli il volume del parallelepipedo V, generato da

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si calcoli il volume del parallelepipedo V, generato da Av_1, Av_2 e Av_3.

Soluzione:

(a) Poniamo $A = (1,2)$, $B = (7,2)$, $C = (3,6)$. Allora i lati AB e AC del triangolo ABC possono essere identificati, rispettivamente, coi vettori

$$v_{BA} = (7,2) - (1,2) = (6,0),$$
$$v_{CA} = (3,6) - (1,2) = (2,4),$$

cioè quei vettori che permettono di traslare A in B e in C rispettivamente. Allora

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|6\cdot 4| = 12.$$

(b) Il volume del parallelepipedo generato da 3 vettori è pari al modulo del determinante della matrice che ha come colonne i 3 vettori, pertanto

$$V = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = |-4| = 4.$$

(c) Analogamente a quanto fatto nel punto precedente, il parallelepipedo generato dai vettori Av_1, Av_2 e Av_3 ha per volume il modulo del determinate della matrice avente tali vettori come colonne. Dal momento che

$$(Av_1|Av_2|Av_3) = A\cdot(v_1|v_2|v_3)$$

si ha quindi

$$V = |\det(A\cdot(v_1|v_2|v_3))| = |\det(A))|\cdot|\det(v_1|v_2|v_3)| = |20|\cdot 4 = 80.$$

(2) Si calcoli la distanza tra il punto $p = (1,2,3,4)$ e l'iperpiano $5x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 6x_4 + 11 = 0$.

Soluzione: Un iperpiano è la generalizzazione del concetto di piano, che conosciamo essere uno spazio di dimensione 2 all'interno di uno spazio di dimensione 3. Nel caso di un cui si lavori in spazi di dimensione n un iperpiano è un sottospazio di dimensione $n-1$.

Chiamiamo π l'iperpiano $5x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 6x_4 + 11 = 0$. Come sottospazi affini abbiamo

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \{0\}, \qquad \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}^{\perp}.$$

Poste quindi V_1 e V_2 le giaciture di p di π rispettivamente, si ha quindi che lo spazio $W = (V_1 + V_2)^{\perp}$ è dato da

$$W = (V_1 + V_2)^{\perp} = \left(\{0\} + \operatorname{span}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}^{\perp}\right)^{\perp} = \left(\operatorname{span}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}^{\perp}\right)^{\perp} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Il vettore che congiunge i punti base di p e π è

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

e quindi possiamo calcolare la proiezione ortogonale di v su W. Esplicitamente:

$$p_W(v) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{30}{174}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{5}{29}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Pertanto abbiamo che

$$d(p, \pi) = \|p_W(v)\| = \left\| \frac{5}{29}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \frac{5}{29}\sqrt{5^2 + 7^2 + (-8)^2 + 6^2} = \frac{5}{29}\sqrt{174}.$$

(3) Sia r la retta in $\mathbf{R}^3$ data da $x + y - 3 = x - z + 1 = 0$ e sia s la retta data da $2x + y - z - 3 = y + z - 7 = 0$.
 (a) Si diano le rappresentazioni parametriche delle rette r ed s.
 (b) Si determini se r e s sono parallele, sghembe o incidenti.
 Soluzione:
 (a) Le rappresentazione parametriche delle rette sono: per la retta r

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = 3 - x \\ z = x + 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + t, \end{cases}$$

per la retta s

$$\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ y + z - 7 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 5 - y \\ z = 7 - y \end{cases} \to \begin{cases} x = 5 - t \\ y = t \\ z = 7 - t. \end{cases}$$

(b) I vettori direttori delle due rette sono:

$$v_r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_s = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il vettore direttore di s è linearmente dipendente da quello di r e di conseguenza le rette sono o parallele o coincidenti. Poiché

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in r \qquad \text{ma} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \notin s$$

deduciamo che le due rette non coincidono, quindi devono essere parallele.

(4) Nello spazio euclideo $\mathbf{R}^3$ si considerino il punto $P = (1; 0; 1)$, la retta

$$r : \begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + y - z = 1 \end{cases},$$

ed il piano $\pi = (0; 0; 1) + \operatorname{span}\{(1; 1; 0); (1; 0; -1)\}$.

(a) Determinare una forma cartesiana del piano π ed una forma parametrica della retta r.
(b) Determinare i punti di r che hanno distanza $\sqrt{5}$ dal punto P.
(c) Determinare la distanza tra la retta r ed il piano π.
(d) Determinare posizione reciproca e distanza tra la retta r e la retta $s = \pi \cap \pi'$, dove π' è il piano contenente la retta r ed il punto P.

Soluzione: (a) Iniziamo determinando una forma parametrica per r:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \to \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y - 2z = 2 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + z \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = t. \end{cases}$$

Abbiamo quindi descritto r come

$$r : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda π, osserviamo che i vettori ortogonali alla sua giacitura sono tutti i vettori $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \alpha = \gamma \end{cases} \Rightarrow \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto un'equazione cartesiana per π è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow x - y + z - 1 = 0.$$

(b) Il vettore congiungente P coon il generico punto sulla retta r è

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 + t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 + t \\ t - 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto i punti di r che distano $\sqrt{5}$ da P sono quelli che soddisfano

$$1 + (t + 1)^2 + (t - 1)^2 = 5 \to 2t^2 = 2 \to t = \pm 1.$$

A tali valori del parametro corrispondono i due punti

$$\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

(c) Osserviamo che il vettore direttore di r appartiene alla giacitura di π, infatti:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Pertanto o la retta giace nel piano o è ad esso parallela. Dal momento che

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \notin \pi$$

deduciamo che la retta è parallela al piano.

La giacitura W_1 di π è generato da $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, -1)$. La giacitura di W_2 è contenuta in quella di W_1. Quindi $W_1 + W_2 = W_1$ e $W = W_1^\perp$ è generato da $(1, 0, -1) \times (1, 1, 0) = (1, -1, 1)$.

Prendiamo adesso il punto $(0, 0, 1)$ su π e $(0, 1, 0) \in r$. Allora la loro differenza è $(0, -1, 1)$ e la distanza tra π e r è la norma di $p_W(0, -1, 1)$:

$$\left\| P_W \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \right\| = \left\| \frac{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

(d) È facile descrivere parametricamente il piano π': esso sarà il sottospazio affine di $\mathbf{R}^3$ con punto base il punto $P = (1, 0, 1)^T$ e giacitura generata da $(0, 1, 1)^T$ (la giacitura di r) e da $(1, -1, 1)^T$ (il vettore congiungente P con $(0, 1, 0)^T \in r$). Allora

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = s - t \\ z = 1 + s + t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = x - 1 \\ s = x + y - 1 \\ z = 1 + (x + y - 1) + (x - 1) \end{cases}$$

e quindi un'equazione cartesiana per π' è $2x + y - z - 1 = 0$. Questo ci permette di scrivere delle equazioni cartesiane per la retta s:

$$s : \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

Il fatto che la matrice del sistema che descrive s abbia rango 2 ci conferma che r è proprio una retta.

Possiamo ora dedurre facilmente che r e s sono rette parallele. Denotiamo infatti con V, V' le giaciture di π, π' rispettivamente, la giacitura di s è allora $V \cap V'$. Dal momento che sappiamo che $\dim(V \cap V') = 1$ perché s è una retta e che $(0, 1, 1)^T \in V \cap V'$, deduciamo quindi che

$$V \cap V' = \operatorname{span}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Calcoliamo infine la distanza tra r e s. Le due rette hanno la stessa giacitura, data da $\mathrm{span}(0,1,1)^T$, il cui spazio ortogonale a è

$$\mathrm{span}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}^{\perp} = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right).$$

È facile osservare che $(2/3,0,1/3) \in s$ e che il vettore congiungente tale punto col punto base di r è

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2/3\\0\\1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/3\\1\\-1/3\end{pmatrix}.$$

La proiezione ortogonale di tale vettore sullo spazio determinato in precedenza è

$$\frac{\begin{pmatrix}-2/3\\1\\-1/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix}-2/3\\1\\-1/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

e pertanto la distanza tra r e s è

$$d(r,s) = \left\| \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$