Soluzioni Tutorato 9

(1) Si determini una base ortonormale per

$$V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\\3\end{pmatrix} \right).$$

Soluzione: Per ottenere una base ortonormale per V bisogna innanzitutto ortogonalizzare la base (col metodo Gram–Schmidt) e successivamente normalizzare i vettori (dividendoli per la loro lunghezza).

Il metodo Gram–Schmidt ci dice che data una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ per V è possibile costruire una base ortogonale $\{w_1, \dots, w_n\}$ in questo modo:

$$w_i = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{v_i \cdot w_k}{w_k \cdot w_k} w_k$$

Dunque scegliendo di partire dal primo vettore dalla base v_1:

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$w_4 = v_4 - \frac{v_4 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{v_4 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 - \frac{v_4 \cdot w_3}{w_3 \cdot w_3} w_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{2}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} - 0 - \frac{7}{5}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2/5\\0\\2\\1/5\end{pmatrix}$$

A questo punto abbiamo ottenuto una base ortogonale per V e rimane da normalizzare i vettori:

$$e_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \qquad e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$e_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\2\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\2\end{pmatrix}; \quad e_4 = \frac{w_4}{\|w_4\|} = \frac{1}{\sqrt{105/25}} \cdot \begin{pmatrix}0\\-2/5\\0\\2\\1/5\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{105}}{105}\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\10\\5\end{pmatrix};$$

La nuova base formata da $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è una base ortonormale per V.

(2) Per quali valori di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ abbiamo che la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \beta & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

è ortogonale?

Soluzione: Una matrice ortogonale una matrice invertibile la cui trasposta coincide con la sua inversa:

$$A^T A = AA^T = I_n \longrightarrow A^T = A^{-1}.$$

La prima condizione si traduce esplicitamente nelle seguenti uguaglianze:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1/2 \\ 0 & \beta & 0 \\ -1/2 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1/2 \\ 0 & \beta & 0 \\ 1/2 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + 1/4 & 0 & -1/2\alpha + 1/2\gamma \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ -1/2\alpha + 1/2\gamma & 0 & \gamma^2 + 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per ottenere $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ tali che la matrice A sia ortogonale dobbiamo quindi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \alpha^2 + 1/4 = 1 \\ \beta^2 = 1 \\ \gamma^2 + 1/4 = 1 \\ -1/2\alpha + 1/2\gamma = 0 \end{cases}$$

Deduciamo quindi dalle prime tre equazioni che $\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta = \pm 1$, $\gamma = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, e dovendo essere $\alpha = \gamma$ (dalla quarta equazione) ricaviamo che le soluzioni del sistema sono:

$$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(3) Si determini una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ che consiste di autovettori di

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: Per ottenere una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ di autovettori di A, bisogna innanzitutto calcolare gli autovettori di A. Notiamo subito che A è una matrice simmetrica: questo ci dice che autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali tra loro e non dovremo applicare il metodo Gram–Schmidt.

Come al solito calcoliamo il polinomio caratteristico $p_A(t) = \det(A - tI_3) = -(t+3)^2(t+12)$, da cui estraiamo gli autovalori, che sono $\lambda_1 = -3$ (con $m_a(-3) = 2$) e $\lambda_2 = -12$ (con $m_a(-12) = 1$). Dunque gli autovettori relativi all'autovalore -3 saranno ortogonali a quelli relativi all'autovalore -12.

Cerchiamo ora gli autovettori risolvendo i sistemi $Sol(A + 3I_3, 0)$ e $Sol(A + 12I_3, 0)$. Otteniamo per -3 due autovettori ($m_g(-3) = 2$):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per -12 otteniamo un autovettore ($m_g(-12) = 1$):

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto dobbiamo solo ortogonalizzare gli autovettori relativi a -3:

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Infine non rimane altro che normalizzare i tre vettori:

$$e_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{\sqrt{35}}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(4) Sia $V \subset \mathbf{R}^3$ il sottospazio dato da $3x - y + 2z = 0$. Si determini la matrice della proiezione ortogonale p_V su V rispetto alla base canonica.

Soluzione: La dimensione di V è 2, e una base di V è $\{(1, 3, 0)^T, (2, 0, -3)^T\}$. Prendendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo che

$$(A^T A) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{126} \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

La matrice di p_V è

$$A(A^T A)^{-1} A^T$$

A questo punto basta moltiplicare le matrici e otteniamo che la matrice di P_V è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{126} \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{126} \begin{pmatrix} 45 & 27 & -54 \\ 27 & 117 & 18 \\ -54 & 18 & 90 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 3 & 13 & 2 \\ -6 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

In alternativa, si può prendere una base ortogonale w_1, w_2 di V. Applichiamo il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt ai vettori della base $\{(1, 3, 0)^T, (2, 0, -3)^T\}$ di V trovata nel punto precedente: il secondo vettore viene sostituito da

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{3}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Quindi come base ortogonale per V possiamo scegliere per esempio $w_1 = (1,3,0)^T, w_2 = (-3,1,5)^T$. Allora possiamo usare la formula per la proiezione nel caso di una base ortogonale:

$$P_V(v) = \frac{v \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 + \frac{v \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2$$

Quindi

$$P_V \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x+3y}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-3x+y+5z}{35} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 25x+15y-30z \\ 15x+65y+10z \\ -30x+10y+50z \end{pmatrix}.$$

Otteniamo che la matrice è

$$\frac{1}{70} \begin{pmatrix} 25 & 15 & -30 \\ 15 & 65 & 10 \\ -30 & 10 & 50 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 3 & 13 & 2 \\ -6 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

in accordo con quanto trovato in precedenza.