CAPITOLO 8

Spazi affini

Il concetto più complicato riguardante l'algebra lineare è la distinzione tra *punti* e *vettori*. Finora non abbiamo veramente distinto questi due concetti. In questo capitolo ci concentreremo su questa problematica, evidenziando la relazione tra i due. Andiamo quindi a definire lo spazio affine.

Definizione 8.1. Uno spazio affine è descritto da una coppia $(\mathbb{A}, V)$, dove $\mathbb{A}$ è lo spazio dei punti, V è uno spazio vettoriale, e abbiamo una mappa (un'azione di V su $\mathbb{A}$) denotata $+_{\mathbb{A}} : (\mathbb{A}, V) \to \mathbb{A}$ tale che

(1) Per ogni $P \in \mathbb{A}$ abbiamo $P +_{\mathbb{A}} \overrightarrow{0} = P$.
(2) Per ogni $P \in \mathbb{A}$, $v, w \in V$ abbiamo che
$$(P +_{\mathbb{A}} v) +_{\mathbb{A}} w = P +_{\mathbb{A}} (v +_V w).$$
(3) Per ogni coppia di punti $P, Q \in \mathbb{A}$ esiste un unico vettore $v \in V$ tale che $Q = P +_{\mathbb{A}} v$.

La terza condizione è equivalente alle seguenti due condizioni.

(1) Per ogni $P \in \mathbb{A}$ la mappa $\varphi_P : V \to \mathbb{A}$ data da $\varphi_P(v) = P +_{\mathbb{A}} v$ è biiettiva.
(2) Per ogni $v \in V$ la mappa $\varphi_v : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ data da $\varphi_v(P) = P +_{\mathbb{A}} v$ è biiettiva.

In particolare possiamo descrivere l'insieme $\mathbb{A}$ come $P +_{\mathbb{A}} V$, dove $P \in \mathbb{A}$.

Osservazione 8.2. Spesso denoteremo semplicemente con $\mathbb{A}$ lo spazio affine che stiamo considerando e chiameremo V la sua *giacitura* o *spazio direttore*. È importante, parlando di spazi affini, distinguere i punti dello spazio dai vettori che agiscono su tali punti.

Osservazione 8.3. Possiamo interpretare in questo modo la definizione di spazio affine: si tratta di un insieme i cui punti possono essere traslati dai vettori appartenenti allo spazio vettoriale. Pertanto scrivere che $Q = P + v$ significa affermare che Q è il punto che si ottiene traslando il punto P del vettore v. In quest'ottica ha anche senso definire una "differenza" punti: dati $P, Q \in \mathbb{A}$ definiamo $Q - P$ come l'unico vettore v tale che $Q = P + v$, cioè come il vettore che trasla P in Q. Osserviamo che né il simbolo $+$ né il simbolo $-$ quando sono utilizzati in questo contesto si riferiscono a delle vere operazioni: da una parte il simbolo $+$ si riferisce infatti ad un'azione di traslazione, dall'altra la differenza tra due punti non è un terzo punto, ma un vettore.

Questo ci dà la possibilità di descrivere i *sottospazi affini* (detti anche sottovarietà lineari) di uno spazio affine, i.e., un sottospazio affine viene caratterizzato dalla scelta di un punto di riferimento P e di un sottospazio $W \subset V$. Quindi $(P + W, W) \subset (\mathbb{A}, V)$ come sottospazio, dove
$$P + W = \{P + w \mid w \in W\}.$$

Lemma 8.4. *Sia $(\mathbb{A}, V)$ uno spazio affine e sia $W \subseteq V$ un sottospazio. Due punti di riferimento P, Q danno lo stesso sottospazio $P + W = Q + W$ se e solo se $P = Q + w$ per qualche $w \in W$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $P + W = Q + W$, in particolare si ha che $Q \in P + W$. Pertanto $Q = P + w$ per qualche $w \in W$ per definizione. Viceversa, supponiamo che $Q = P+w$ per qualche $w \in W$. Consideriamo quindi $Q+w' \in Q+W$: si ha che $Q+w' = (P+w)+w' = P+(w+w') \in P+W$. D'altra parte, per $P+w'' \in P+W$ vale che $P + w'' = (Q + (-w)) + w'' = Q + (w'' - w) \in Q + W$. $\square$

ESEMPIO 8.5. Lo spazio affine standard è lo spazio $\mathbb{A}^n = (K^n, K^n)$, dove l'azione di traslazione definita da

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n).$$

In questo caso c'è un legame tra i sottospazi affini di $\mathbb{A}^n$ e i sottospazi vettoriali di K^n: un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$ può essere identificato ad un sottospazio vettoriale di K^n se e solo se contiene $\overrightarrow{0}$.

ESEMPIO 8.6. Siano $\mathbb{A} = \mathbf{R}^2$ e $V = \mathbf{R}^2$, consideriamo il sottospazio affine definito dalla retta $s : x - y + 1 = 0$. Allora abbiamo che la retta è parallela alla retta $t : x - y = 0$, passante per l'origine. Questa seconda retta è un sottospazio vettoriale di $V = \mathbf{R}^2$, ossia t corrisponde al sottospazio vettoriale

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Possiamo quindi scrivere

$$s : \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ESEMPIO 8.7. Siano $A \in M_{m,n}(K)$ e $b \in K^n$. Allora:

(1) $\mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0}) \subset K^n$ è un sottospazio (sia affine che vettoriale).
(2) Se $\bar{x} \in K^n$ è una soluzione particolare del sistema $Ax = b$, allora $\mathrm{Sol}(A, b) = \bar{x} + \mathrm{Sol}(A, \overrightarrow{0})$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$.

DEFINIZIONE 8.8. Dato uno spazio affine $(\mathbb{A}, V)$, definiamo la sua dimensione come la dimensione della sua giacitura. Quindi $\dim \mathbb{A} := \dim V$.

Sia $\mathbb{A}$ un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$. Allora:

(1) $\dim \mathbb{A} = 0$ se e soltanto se $\mathbb{A}$ è un punto di $\mathbb{A}^n$;
(2) $\mathbb{A}$ viene chiamato *retta* se $\dim \mathbb{A} = 1$;
(3) $\mathbb{A}$ viene chiamato *piano* se $\dim \mathbb{A} = 2$;
(4) $\mathbb{A}$ viene chiamato *iperpiano* se $\dim \mathbb{A} = n - 1$.

Per esempio in $\mathbb{A}^2$ abbiamo sottospazi affini di dimensione 0 (punti), dimensione 1 (rette) e dimensione 2 (tutto lo spazio). Quale è la differenza con i sottospazi vettoriali? È che adesso ammettiamo che due sottospazi possano avere intersezione vuota.

1. Rappresentazioni di sottospazi affini

Un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$ è descritto da un punto di riferimento e dalla sua giacitura, ma ci sono altri due modi coi quali possiamo descriverlo: mediante *equazioni cartesiane* o mediante *equazioni parametriche*. Vediamo ora come queste sono definite e come è possibile passare da una descrizione ad un'altra.

Sia $L \subseteq \mathbb{A}^n$ il sottospazio affine descritto dal punto base P_0 ed avente $V \subseteq \mathbf{R}^n$ per giacitura, e fissiamo una base $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ per V. Per definizione si ha che $P \in L$ se e soltanto se $P - P_0 \in V$ e possiamo quindi scrivere $P - P_0 =$

$t_1v_1 + \ldots + t_mv_m$ per un'opportuna scelta dei parametri $t_1, \ldots, t_n$. Si ha quindi che L è descritto dalle *equazioni parametriche*

$$P = P_0 + t_1v_1 + \ldots t_mv_m = P_0 + \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & \ldots & v_m \end{array} \right) \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}, \qquad t_1, \ldots, t_m \in \mathbf{R}.$$

Osservazione 8.9. Nella precedente sezione avevamo osservato che gli insiemi della forma $\mathrm{Sol}(A|b)$ sono dei sottospazi lineari di $\mathbb{A}^n$. Grazie al fatto che ogni sottospazio affine può essere descritto da una forma parametrica vediamo anche che, viceversa, ogni sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$ è della forma $\mathrm{Sol}(A|b)$ per un'opportuna matrice A e vettore di termini noti b.

Grazie alla teoria del rango che abbiamo sviluppato, possiamo poi passare dalla forma parametrica a quella cartesiana. Infatti la condizione che $P - P_0 \in V$ si traduce nel fatto che

$$\mathrm{rg} \left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & \ldots & v_m & P - P_0 \end{array} \right) \leq m.$$

Le equazioni che risultano sono le *equazioni cartesiane* del sottospazio.

Esempio 8.10. Consideriamo la retta in $\mathbb{A}^3$ di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 - t \end{cases}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Abbiamo quindi che il punto base è $P_0 = (1, 0, 2)$ mentre la giacitura è $V = \mathrm{span}(1, -1, -1)$. Per descrivere r mediante equazioni cartesiane dobbiamo quindi imporre che

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} x - 1 & 1 \\ y & -1 \\ z - 2 & -1 \end{pmatrix} \leq 1.$$

Applicando il procedimento di Gauss troviamo che

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} x - 1 & 1 \\ x + y - 1 & 0 \\ x + z - 3 & 0 \end{pmatrix} \leq 1.$$

Quindi $x + y - 1 = x + z - 3 = 0$ sono le equazioni per la retta.

Equivalentemente si poteva ricavare t da un'equazione, ad esempio $t = -y$, e sostituire quanto trovato nelle rimanenti equazioni, trovando le equazioni

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Esempio 8.11. Sia π il piano in $\mathbb{A}^4$ descritto dalle equazioni cartesiane

$$\pi : \begin{cases} x - z = 2 \\ y + z - t = -1. \end{cases}$$

Esplicitando le variabili determinate in termini delle variabili libere e promuovendo le variabili libere a parametri possiamo ricavare la forma parametrica di π:

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ y + z - t = -1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = z + 2 \\ y = -z + t - 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - \lambda + \mu \\ z = \lambda \\ t = \mu. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 8.12. Un iperpiano H di $\mathbb{A}^n$ può quindi essere descritto da un'unica equazione cartesiana: sia $B = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ una base per la giacitura di H e sia $P_0 \in H$ un punto base, allora

$$0 = \det\left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & \dots & v_{n-1} & P - P_0 \end{array} \right) = (v_1 \times \dots \times v_{n-1}) \cdot (P - P_0)$$

è un'equazione cartesiana che descrive H. Possiamo scrivere

$$v_1 \times \dots \times v_{n-1} = (a_1, \dots, a_n), \qquad P_0 = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n),$$

allora

$$(v_1 \times \dots \times v_{n-1}) \cdot (P - P_0) = 0 \rightsquigarrow a_1 x_1 + \dots a_n x_n = b$$

dove $b = a_1\bar{x}_1 + \dots + a_n\bar{x}_n$. Ciò mostra che i coefficienti nell'equazione di un iperpiano sono le componenti di un vettore ortogonale alla giacitura dell'iperpiano stesso.

2. Il caso 2-dimensionale

Iniziamo a studiare il caso degli spazi affini di dimensione 2. Questo caso è particolarmente semplice. La dimensione di un sottospazio affine di $\mathbb{A}^2$ può essere solamente 0, 1 o 2.

Un sottospazio di dimensione 1 è la soluzione di un'unica equazione cartesiana. Andiamo a studiare quale potrebbe essere la posizione reciproca di due rette nello spazio affine.

Siano

$$r_1 : a_{11}x + a_{12}y = b_1 \quad \text{e} \quad r_2 : a_{21}x + a_{22}y = b_2.$$

Un punto appartiene ad entrambe le rette se e solo se soddisfa entrambe le equazioni cartesiane: dobbiamo quindi tornare allo studio di sistemi di equazioni lineari, e quindi al rango di matrici.

La matrice associata a tale sistema è

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array} \right).$$

Abbiamo 3 possibilità

- $\mathrm{rg}(A) = 2$, allora il sistema ammette un'unica soluzione e le rette devono essere *incidenti.*
- $\mathrm{rg}(A) = 1$ e $\mathrm{rg}(A|b) = 1$, allora il sistema ammette infinite soluzioni e le rette sono *coincidenti.*
- $\mathrm{rg}(A) = 1$ e $\mathrm{rg}(A|b) = 2$, allora il sistema NON ammette soluzioni e le rette sono *parallele.*

3. Dimensione superiore

Diamo ora le seguenti definizioni generali.

DEFINIZIONE 8.13. Sia $(\mathbb{A}, V)$ uno spazio affine e siano $(\mathbb{A}_1, W_1)$ e $(\mathbb{A}_2, W_2)$ due sottospazi affini.

(1) Se $\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2 \neq \varnothing$, i sottospazi $\mathbb{A}_1$ e $\mathbb{A}_2$ si dicono *incidenti.*
(2) $(\mathbb{A}_1, W_1)$ e $(\mathbb{A}_2, W_2)$ si dicono *paralleli* se una delle due giaciture è contenuta nell'altra (cioè $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$). In questo caso si danno poi due sottocasi: quello in cui i sottospazi sono paralleli con intersezione vuota, o quando sono uno contenuto nell'altro.
(3) $(\mathbb{A}_1, W_1)$ e $(\mathbb{A}_2, W_2)$ si dicono *sghembi* se non hanno punti in comune e le giaciture sono in somma diretta (cioè $\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2 = \emptyset$ e $V_1 \cap V_2 = \{\overrightarrow{0}\}$).

ESEMPIO 8.14. Per esempio due rette in $\mathbf{R}^3$ possono essere incidenti, coincidenti, parallele o sghembe. Due piani in $\mathbf{R}^3$ possono essere paralleli, coincidenti o incidenti ma non sghembi. In $\mathbf{R}^3$ due piani che non si intersecano sono quindi forzatamente paralleli. Invece in $\mathbf{R}^4$ esistono piani che non si intersecano e che non sono paralleli e neppure sghembi (ad esempio $\pi_1 : x_1 = x_2 = 0$ e $\pi_2 : x_1 - 1 = x_4 = 0$), mentre non esistono piani sghembi in $\mathbf{R}^4$.

4. Distanze

Nel caso in cui il campo $K = \mathbf{R}$ possiamo introdurre in uno spazio affine $(\mathbb{A}, V)$ il concetto di distanza. Se $V = \mathbf{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale possiamo introdurre la nozione di distanza fra punti P e $P + v$ come la norma del vettore v. Quindi il prodotto scalare è la chiave per poter dare la definizione di distanza tra sottospazi affini.

Per due punti $P, Q \in \mathbb{A}^n$ abbiamo già definito loro distanza $d(P, Q)$ come

$$\|P - Q\|.$$

La distanza di un punto P da un sottospazio affine $\mathbb{A}$ è definita da

$$\min_{Q \in \mathbb{A}} d(P, Q)$$

e la distanza tra due sottospazi affini $\mathbb{A}_1$ e $\mathbb{A}_2$ di $\mathbf{R}^n$ è definita da

$$\min_{P_1 \in \mathbb{A}_1, P_2 \in \mathbb{A}_2} d(P_1, P_2).$$

LEMMA 8.15. *Sia $\mathbb{A}$ un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$, sia V la sua giacitura. Allora per ogni $P \in \mathbb{A}^n$ esiste un unico punto $Q \in \mathbb{A}$ tale che $P - Q \in V^\perp$.*

DIMOSTRAZIONE. Per prima cosa mostriamo l'esistenza. Sia $R \in \mathbb{A}$ un punto qualsiasi. Allora $P - R \in \mathbf{R}^n$ è un vettore che possiamo decomporre come $v + w$ con $v \in V$ e $w \in V^\perp$. Dal fatto che $R \in \mathbb{A}$ e $v \in V$ segue che $R + v \in \mathbb{A}$. Inoltre $P - (R + v) = v + w - v = w$ è in $W^\perp$. Quindi possiamo scegliere $R + v$ per Q.

Rimane da mostrare l'unicità. Siano Q_1 e Q_2 punti di $\mathbb{A}$ tali che $P - Q_1$ e $P - Q_2$ sono in $V^\perp$. Allora anche loro differenza è in $V^\perp$ e troviamo

$$(P - Q_1) - (P - Q_2) = Q_2 - Q_1 \in V^\perp.$$

Dal fatto che Q_1 e Q_2 sono in $\mathbb{A}_1$ segue che la differenza $Q_2 - Q_1$ è un vettore di V. Quindi $Q_1 - Q_2 \in V \cap V^\perp = \{\overrightarrow{0}\}$, così $Q_1 = Q_2$ e il punto Q è unico. □

DEFINIZIONE 8.16. Grazie al lemma appena dimostrato possiamo definire la *proiezione ortogonale* $p_{\mathbb{A}}$ su $\mathbb{A}$ come $p_{\mathbb{A}}(P) = Q$.

LEMMA 8.17. *Sia $\mathbb{A}$ un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n$, sia $P \in \mathbb{A}^n$ un punto. Allora*

$$d(P, \mathbb{A}) = d(P, p_{\mathbb{A}}(P)).$$

Quindi $p_{\mathbb{A}}(P)$ è il punto di $\mathbb{A}$ avente distanza minima da P ed è detto punto di minima distanza.

DIMOSTRAZIONE. Dal fatto che $p_{\mathbb{A}}(P) \in \mathbb{A}$ segue che

$$d(P, \mathbb{A}) = \min_{Q \in \mathbb{A}} d(P, Q) \leq d(P, p_{\mathbb{A}}(P)).$$

Sia V la giacitura di $\mathbb{A}$ e sia $Q \in \mathbb{A}$ qualsiasi. Allora $P - Q = v + w$ con $v \in V, w \in V^\perp$. Segue che $v \cdot w = 0$ e che

$$d(P, Q)^2 = \|v + w\|^2 = (v + w) \cdot (v + w) = v \cdot v + 2(v \cdot w) + w \cdot w = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Abbiamo visto nel lemma precedente che $p_{\mathbb{A}}(P) := Q + v$ e così

$$d(P, p_{\mathbb{A}}(P))^2 = d(P, Q + v)^2 = \|P - Q - v\|^2 = \|w\|^2.$$

Quindi $d(P,Q) \geq d(P, p_{\mathbb{A}}(P))$ per ogni $Q \in \mathbb{A}$ e perciò $p_{\mathbb{A}}(P) := Q + v$ è punto di minima distanza. In particolare $d(P, \mathbb{A}) \geq d(P, p_{\mathbb{A}}(P))$ e combinando le due disuguaglianze si ha $d(P, \mathbb{A}) = d(P, p_{\mathbb{A}}(P))$. $\square$

OSSERVAZIONE 8.18. Siano $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ sottospazi affini e siano $P_1 \in \mathbb{A}_1, P_2 \in \mathbb{A}_2$ punti di distanza minima tra $\mathbb{A}_1$ e $\mathbb{A}_2$. Allora $p_{\mathbb{A}_2}(P_1) = P_2$ e $p_{\mathbb{A}_1}(P_2) = P_1$.

ESEMPIO 8.19. Consideriamo le rette ℓ_1 insieme dei punti $(0,1,1) + t(1,2,3)$ al variare di $t \in \mathbf{R}$, ed ℓ_2, insieme dei punti $(1,0,1) + s(1,1,1)$ al variare di $s \in \mathbf{R}$. Allora la differenza tra due punti generici è data da

$$(-1,1,0) + t(1,2,3) - s(1,1,1) = (-1 + t - s, 1 + 2t - s, 3t - s).$$

Affinché questo vettore sia ortogonale a ℓ_1 dobbiamo avere

$$(-1 + t - s, 1 + 2t - s, 3t - s) \cdot (1,2,3) = 0.$$

Per essere ortogonale a ℓ_2 dobbiamo avere

$$(-1 + t - s, 1 + 2t - s, 3t - s) \cdot (1,1,1) = 0.$$

Quindi

$$1 + 14t - 6s = 0 \;\; 6t - 3s = 0,$$

ottenendo $s = -1$, $t = -\frac{1}{2}$.

La distanza è quindi data da

$$\left\| \left(\frac{-1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right) \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

ed i punti di minima distanza sono $L_1 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,2,3) = (-1/2, 0, -1/2)$ in ℓ_1 e $L_2 = (1,0,1) - (1,1,1) = (0,-1,0)$ in ℓ_2.

ESEMPIO 8.20. Sia π il piano in $\mathbb{A}^3$ tale che $2x - y + 5z - 6 = 0$. In questo caso $\pi = (1,1,1) + \{(2,-1,5)\}^{\perp}$.

Se vogliamo adesso calcolare la distanza tra $(10,-1,12)$ e π sappiamo che la proiezione ortogonale del punto su π è l'intersezione della retta $(10,-1,12) + t(2,-1,5)$ ed il piano π.

Troviamo che la retta e π si intersecano nel punto con $75 + 30t = 0$, cioè in corrispondenza del valore $t = -5/2$ del parametro. La distanza del punto dal piano è quindi $\left\| -\frac{5}{2}(2,-1,5) \right\| = 5/2\sqrt{30}$

Diamo ora un metodo più efficiente per calcolare le distanze.

LEMMA 8.21. *Siano $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ sottospazi affini di $\mathbb{A}^n$, con giaciture V_1 e V_2. Siano $P_i \in \mathbb{A}_i$ punti qualsiasi. Sia $W = (V_1 + V_2)^{\perp}$. Allora*

$$d(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2) = \|p_W(P_1 - P_2)\|.$$

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo $P_1 - P_2 = v_1 + v_2 + w$, dove $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ e $w \in (V_1 + V_2)^{\perp} = W$. In particolare $w = p_W(P_1 - P_2)$.

Allora $P_1 - v_1 \in \mathbb{A}_1$ e $P_2 + v_2 \in \mathbb{A}_2$ e quindi

$$d(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2) \leq d(P_1 - v_1, P_2 + v_2) = \|P_1 - v_1 - P_2 - v_2\| = \|w\|.$$

Siano $Q_1 \in \mathbb{A}_1, Q_2 \in \mathbb{A}_2$ punti. Allora $Q_1 = P_1 + v_3$, con $v_3 \in V_1$ e $Q_2 = P_2 + v_4$, con $v_4 \in \mathbb{A}$. Allora $Q_1 - Q_2 = P_1 + v_3 - P_2 - v_4 = v_1 + v_3 + v_2 - v_4 + w$. Usando il fatto che $v_1 + v_3 + v_2 - v_4 \in V_1 + V_2$ e $w \in (V_1 + V_2)^{\perp}$ troviamo

$$d(Q_1, Q_2)^2 = \|v_1 + v_3 + v_2 - v_4\|^2 + \|w\|^2.$$

In particolare $d(Q_1, Q_2) \geq \|w\|$ per ogni $Q_1 \in \mathbb{A}_1$ e $Q_2 \in \mathbb{A}_2$ e quindi $d(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2) \geq \|w\|$. Combinando le due disuguaglianze si ha

$$d(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2) = \|w\| = \|p_W(P_1 - P_2)\|.$$

$\square$

OSSERVAZIONE 8.22. Se $\dim(V_1 + V_2) = n$, allora i due sottospazi affini si intersecano e la loro distanza sarà nulla.

ESEMPIO 8.23. Il caso più semplice è quello in cui $\dim(V_1+V_2)^\perp = 1$. Esempio di essi sono il calcolo della distanza tra punto e iperpiano e il calcolo della distanza tra due rette sghembe in $\mathbb{A}^3$.

ESEMPIO 8.24. Riconsideriamo le rette dell'Esempio 8.19. Allora $(0,1,1)$ e $(1,0,1)$ sono punti sulle due rette e loro differenza è $(-1,1,0)$. Lo spazio $W^\perp$ è generato da $(1,2,3) \times (1,1,1) = (-1,2,-1)$.

Allora $p_W(-1,1,0)$ è

$$\frac{(-1,1,0)\cdot(-1,2,-1)}{(-1,2,-1)\cdot(-1,2,-1)}(-1,2,-1) = \frac{1}{2}(-1,2,-1),$$

la cui lunghezza è $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

ESEMPIO 8.25. Concludiamo con un ultimo metodo per calcolare la distanza tra le rette dell'Esempio 8.19.

Anche questo metodo funziona solamente nel caso in cui lo spazio ortogonale W abbia dimensione 1.

Abbiamo due proprietà fondamentali del determinante. Si segnala che queste proprietà sono alla base di molte tecniche utilizzate in analisi.

- Dati n vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ in $\mathbf{R}^n$, allora
$$|\det(v_1|\dots|v_n)|$$
è il volume del parallelepipedo n-dimensionale generato da $\{v_1, \dots, v_n\}$.
- Dati $(n-1)$ vettori $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ in $\mathbf{R}^n$, allora
$$\|v_1 \times \dots \times v_{n-1}\|$$
è il volume del parallelepipedo $(n-1)$-dimensionale generato da
$$\{v_1, \dots, v_{n-1}\}.$$

Tornando all'esempio 8.19, possiamo in particolare calcolare la proiezione ortogonale su W come l'altezza del parallelepipedo generato dai generatori delle giaciture e dal vettore congiungente $P - Q$.

Otteniamo quindi la formula

$$\|p_W(P-Q)\| = \frac{|\det(v_1|\dots|v_{n-1}|(P-Q))|}{\|v_1 \times \dots \times v_{n-1}\|}.$$

Nell'esempio avremo

$$\left\| p_W \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\left|\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{3}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

Nel caso in cui si vuole calcolare la distanza di un punto da un iperpiano, possiamo semplificare la precedente formula ulteriormente.

LEMMA 8.26. *Sia* $P = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{A}^n$ *un punto e sia* $H : a_1x_1 + \dots a_nx_n + b = 0$ *un iperpiano di* $\mathbb{A}^n$. *Allora*

$$d(P,H) = \frac{|a_1\bar{x}_1 + \dots a_n\bar{x}_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Dimostrazione. Sia $Q = (y_1, \ldots, y_n) \in H$ un punto qualsiasi. Allora $a_1y_1 + \ldots + a_ny_n + b = 0$ e possiamo descrivere H come il sottospazio con punto base Q e giacitura $v^\perp$, dove $v = (a_1, \ldots, a_n)$. Con le notazioni del lemma precedente si ha quindi che $W = \operatorname{span} v$ e

$$p_W(P-Q) = \frac{(P-Q)\cdot v}{v \cdot v} v = \frac{(\bar{x}_1 - y_1)a_1 + \ldots + (\bar{x}_n - y_n)a_n}{a_1^2 + \ldots + a_n^2} v.$$

Si ha infine che

$$(\bar{x}_1 - y_1)a_1 + \ldots + (\bar{x}_n - y_n)a_n = a_1\bar{x}_1 + \ldots + a_n\bar{x}_n - a_1y_1 - \ldots - a_ny_n = a_1\bar{x}_1 + \ldots + a_n\bar{x}_n + b,$$

e quindi

$$d(P,H) = \|p_W(P-Q)\| = \frac{|a_1\bar{x}_1 + \ldots a_n\bar{x}_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}.$$

□

5. Classificazione delle coniche

Definizione 8.27. Siano $(\mathbb{A}_1, V_1)$ e $(\mathbb{A}_2, V_2)$ due sottospazi affini. Una trasformazione affine di una nell'altra consiste di due mappe $f : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ e $g : V_1 \to V_2$, dove g è lineare e per ogni $p \in \mathbb{A}_1, v \in V_1$ abbiamo $f(p +_{\mathbb{A}_1} v) = f(p) +_{\mathbb{A}_2} g(v)$.

Una *affinità* è una trasformazione affine, dove la mappa f è biettiva.

Una *isometria* è una affinità tale che la funzione lineare g è una isometria.

Osservazione 8.28. Sia $P \in \mathbb{A}_1$. Una trasformazione affine $(f,g) : (\mathbb{A}_1, V_1) \to (\mathbb{A}_2, V_2)$è determinata dalla funzione lineare $g : V_1 \to V_2$ e l'immagine del punto P. Sia $Q \in \mathbb{A}_1$ e $v = Q - P$. Allora $f(Q) = f(P+v) = f(P) + g(v)$.

Similmente g è completamente determinata da f, in cui $g(v) = f(P+v) - f(P)$, per ogni ¶ $\in \mathbb{A}_1, v \in V$.

Studiamo ora il caso delle affinità $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$. Sia $O = (0, \ldots, 0)$ e $P = f(O)$. Allora la funziona $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ è definita da $g(v) = f(P+v) - P$ è una mappa sulla giacitura. In particolare f è la composizione di una traslazione ed un isomorfismo di $\mathbf{R}^n$.

Nel caso $n = 2$ troviamo che ogni affinità è della forma $f(x,y) = (ax + by + c, dx + ey + f)$, con $a,b,c,d,e,f \in \mathbf{R}$ e $ae - bd \neq 0$.

Esempio 8.29. Consideriamo il caso $\mathbf{R}^2$. Allora ogni affinità è della forma $f(x,y) = (ax + by + c, dx + ey + f)$, con $a,b,c,d,e,f \in \mathbf{R}$ e $ae - bd \neq 0$. La mappa sulla giacitura è dato da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Questo è una isometria se e solo se esiste un $\varphi \in \mathbf{R}$ tale che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

o

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Lo scopo di questo capitolo è di classificare le coniche. Cominciamo con ricordare le definizione di ellisse, iperbola e parabola:

Definizione 8.30. Un *ellisse* è il luogo dei punti del piano la cui somma delle distanze da due punti fissi, detti *fuochi*, è costante.

Fissiamo due punti F_1, F_2 e cerchiamo di descrivere l'insieme C dei punti P tali che $d(P, F_1) + d(P, F_2)$ sia costante, diciamo pari a $2d$.

Dopo una rotazione possiamo assumere che F_1, F_2 siano sulla retta $y = 0$, e dopo una traslazione possiamo assumere che il loro punto medio sia $(0, 0)$, quindi $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Se $c > d$ allora C è vuoto: sia $P = (x, y) \in \mathbb{A}^2$ allora $d(P, F_1) \geq |-(x + c)|$ e $d(P, F_2) \geq |x - c|$ quindi $d(P, F_1) + d(P, F_2) \geq |-(x + c)| + |(x - c)| \geq |x - c - x - c| = 2c$.

Adesso assumiamo $d \geq c$. Scriviamo d_1 per $d(P, F_1)$ e d_2 per $d(P, F_2)$. Allora $d_1^2 = y^2 + (x + c)^2$, $d_2^2 = y^2 + (x - c)^2$. Quindi $d_1^2 + d_2^2 = 2y^2 + 2x^2 + 2c^2$ e $d_1^2 - d_2^2 = 4cx$.

L'insieme C è descritto da $d_1 + d_2 = 2d$. Prendendo quadrati dei lati troviamo che $d_1^2 + 2d_1d_2 + d_2^2 = 4d^2$. Quindi

$$d_1d_2 = 2d^2 - \frac{d_1^2 + d_2^2}{2}.$$

Elevando ambo i membri al quadrato troviamo che

$$d_1^2d_2^2 = 4d^4 + \frac{1}{4}(d_1^4 + d_2^4) + \frac{1}{2}d_1^2d_2^2 - 2d^2(d_1^2 + d_2^2)$$

e quindi

$$0 = 4d^4 + \frac{1}{4}(d_1^4 + d_2^4) - \frac{1}{2}d_1^2d_2^2 - 2d^2(d_1^2 + d_2^2).$$

Completando il quadrato ci dà

$$0 = 4d^4 + \left(\frac{1}{2}(d_1^2 - d_2^2)\right)^2 - 2d^2(d_1^2 + d_2^2)$$

Usando l'espressioni per $d_1^2 - d_2^2$ e $d_1^2 + d_2^2$ dà

$$0 = 4d^4 + \frac{1}{4}(4xc)^2 - 4d^2(x^2 + y^2 + c^2).$$

Dividendo per 4 troviamo

$$0 = d^4 - d^2c^2 - x^2(d^2 - c^2) - d^2y^2.$$

Dividendo infine per $d^2(d^2 - c^2)$ otteniamo

$$\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{d^2 - c^2} = 1.$$

In questo modo troviamo tutte le equazioni della forma $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$, con $0 < \alpha \leq \beta$. Scambiando il ruolo di x e y troviamo tutte le equazioni della stessa forma con $\alpha, \beta > 0$.

Definizione 8.31. Un'*iperbole* è il luogo dei punti del piano la cui differenza (in modulo) delle distanze da due punti fissi, detti *fuochi*, è costante.

Fissiamo due punti F_1, F_2 e cerchiamo di descrivere l'insieme C dei punti P tale che $d(P, F_1) - d(P, F_2)$ sia constante, diciamo $2d$.

Un calcolo simile dà che sono della forma $\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$, con $\alpha, \beta > 0$. Esplicitamente: Siano $F_1, F_2 \in \mathbb{A}^2$ due punti e descriviamo il luogo dei punti $P = (x, y) \in \mathbb{A}^2$ tali che $|d(P, F_1) - d(P, F_2)|$ sia costante, diciamo pari a $2d$. Dopo una rotazione possiamo assumere che F_1 ed F_2 appartengano alla retta $y = 0$, e dopo una traslazione possiamo fare in modo che il segmento di estremi F_1 e F_2 abbia l'origine come punto medio. Pertanto abbiamo che $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$.

Perché tale luogo sia non vuoto deve essere $c > d$. Infatti dalla disuguaglianza triangolare si ha che

$$\begin{cases} d(P, F_1) \leq d(P, F_2) + d(F_2, F_1) \\ d(P, F_2) \leq d(P, F_1) + d(F_1, F_2) \end{cases} \Rightarrow -d(F_1, F_2) \leq d(P, F_1) - d(P, F_2) \leq d(F_1, F_2)$$

e cioè

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| < d(F_1, F_2),$$

ossia $2d < 2c$, da cui $c > d$.

Supponiamo quindi che $c > d$ e poniamo quindi $d_1 = d(P, F_1)$ e $d_2 = d(P, F_2)$. Allora da $|d_1 - d_2| = 2d$ ricaviamo che $d_1^2 - 2d_1d_2 + d_2^2 = 4d^2$ e quindi che $2d_1d_2 = d_1^2 + d_2^2 - 4d^2$. Elevando nuovamente al quadrato ambo i membri di questa uguaglianza si ottiene la relazione

$$4d_1^2d_2^2 = d_1^4 + d_2^4 + 2d_1^2d_2^2 + 16d^4 - 8d^2(d_1^2 + d_2^2),$$

ossia

$$d_1^4 + d_2^4 - 2d_1^2d_2^2 + 16d^4 - 8d^2(d_1^2 + d_2^2) = 0$$

ed infine

$$(d_1^2 - d_2^2)^2 + 16d^4 - 8d^2(d_1^2 + d_2^2) = 0.$$

Dal momento che $d_1^2 + d_2^2 = 2y^2 + 2x^2 + 2c^2$ e $d_1^2 - d_2^2 = 4cx$, ricaviamo che la precedente equazione è equivalente a

$$16c^2x^2 + 16d^4 - 16d^2(y^2 + x^2 + c^2) = 0$$

$$16(c^2 - d^2)x^2 - 16d^2y^2 = 16d^2(c^2 - d^2).$$

Dividendo quindi per $16d^2(c^2 - d^2)$ si ottiene l'equazione

$$\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{c^2 - d^2} = 1.$$

Da $c > d > 0$ segue che $0 < c^2 - d^2 < d^2$. In questo modo troviamo tutte le equazioni della form $\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$, con $0 < \alpha < \beta$. Scambiando il ruolo di x e y troviamo tutte le equazioni della form $\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$ con $\alpha, \beta > 0$.

Definizione 8.32. Una *parabola* è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso, detto *fuoco*, e da una retta, detta *direttrice*, cui il punto non appartiene.

Siano quindi $r \subseteq \mathbb{A}^2$ una retta e $F \in \mathbb{A}^2 \setminus r$ un punto. Dopo una rotazione ed una traslazione possiamo assumere che r sia una retta orizzontale e che F giaccia sull'asse y. Detta H la proiezione ortogonale di F su r possiamo infine fare in modo che il punto medio del segmento di estremi F e H sia l'origine. In questo modo abbiamo che

$$F = (0, a), \qquad r : y = -a \qquad (a \in \mathbf{R}).$$

Il quadrato della distanza di un punto $P = (x, y)$ da F è

$$d(P, F)^2 = x^2 + (y - a)^2 = x^2 + y^2 - 2ay + a^2.$$

D'altra parte il quadrato della distanza di P da r (osserviamo che la distanza è realizzata da un segmento verticale) è

$$d(P, r)^2 = |y + a|^2 = y^2 + 2ay + a^2.$$

Così la condizione $d(P, F)^2 = d(P, r)^2$ è equivalente alla condizione

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 + 2ay + a^2$$

e quindi

$$y = \frac{1}{4}ax^2.$$

Osserviamo che abbiamo $a \neq 0$ (in quanto $F \notin r$) e quindi si danno due possibilità: o $a > 0$ o $a < 0$. Nel primo caso la parabola volge la sua concavità verso l'alto, nel secondo caso la rivolge verso il basso.

Le curve descritte sopra sono casi speciali di una conica:

DEFINIZIONE 8.33. Una *conica* in $\mathbf{R}^2$ è l'insieme degli zeri di un polinomio di grado 2 in (x, y). Quindi $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ con

$$f(x, y) = a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

A questo punto vogliamo descrive tutte le coniche.

Possiamo associare ad f una matrice simmetrica tre per tre descritta come

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

In questo caso abbiamo che:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Denotiamo con B la matrice dei coefficienti quadratici,

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che $\operatorname{tr}(B) = a_{11} + a_{22}$.

ESEMPIO 8.34. Adesso consideriamo le equazioni che abbiamo trovato per ellisse, iperbole e parabole.

Sia $\alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0$ un'ellisse (quindi con $\alpha, \beta > 0$). Allora la matrice A è

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e la matrice B è

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

In questo case abbiamo $\det(A)\operatorname{tr}(B) = -\alpha\beta(\alpha + \beta) < 0$ e $\det(B) = \alpha\beta > 0$.

Per un'iperbole troviamo le stesse matrici, ma in quel caso $\alpha > 0$ e $\beta < 0$. In particolare $\det(B) < 0$.

Per la parabola $\alpha x^2 - y = 0$ troviamo le matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In questo caso $\det(B) = 0$ e $\det(A)\operatorname{tr}(B) = -\frac{\alpha^2}{4} < 0$.

OSSERVAZIONE 8.35. Sia adesso $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una isometria

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

dove la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

è ortogonale. Se poniamo $x_1 = ax + by + c, y_1 = dx + ey + f$, allora

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - Q^{-1} \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - Q^T \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

(usando che $Q^{-1} = Q^T$ essendo Q ortogonale). Sia

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c' & a & d \\ f' & b & e \end{pmatrix}$$

dove $(c', f')^T = -Q^T(c, f)^T$. Allora

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

In particolare troviamo

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \end{pmatrix} R^T A R \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice associata a $T(C)$ è

$$R^T AR.$$

Usando lo sviluppo lungo la prima riga di R otteniamo che $\det(R) = \det(Q)$. Dal fatto che Q è una matrice ortogonale segue che $\det(Q) \in \{-1, 1\}$. Quindi

$$\det(R^T AR) = \det(R)^2 \det(A) = \det(Q)^2 \det(A) = \det(A)$$

Nella discussione seguente consideriamo solo traslazioni (quindi $a = e = 1, b = d = 0$), rotazioni (in particolare $c' = f' = 0$) e la riflessione in $x = y$ (in questo caso $a = c' = e = f' = 0$, $b = d = 1$)

Osservazione 8.36. L'ipotesi che f sia di grado 2 implica che almeno uno tra a_{11}, a_{22}, a_{12} sia non-zero, in particolare il rango di A e il rango di B è almeno 1.

Notiamo inoltre che sia la matrice A associata alla conica che la sottomatrice B sono entrambe matrici simmetriche e, dal teorema spettrale, esse sono diagonalizzabili tramite una matrice ortogonale. Diremo che la matrice di una conica è in forma canonica se essa è in forma diagonale oppure, nel caso della parabola, in forma anti-diagonale.

Proposizione 8.37. *Sia C una conica in $\mathbf{R}^2$ allora esiste una isometria $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $T(C)$ è in forma canonica ed è*

1. *una circonferenza o un'ellisse se* $(\operatorname{tr}(B)\det(A) < 0, \det(B) > 0)$,
2. *una conica complessa senza punti reali se* $(\operatorname{tr}(B)\det(A) > 0, \det(B) > 0)$,
3. *due rette complesse, incidenti in un punto reale se* $(\det(A) = 0, \det(B) > 0)$,
4. *un'iperbole se* $(\det(A) \neq 0, \det(B) < 0)$,
5. *due rette incidenti se* $(\det(A) = 0, \det(B) < 0)$,
6. *una parabola se* $(\det(A) \neq 0, \det(B) = 0)$,
7. *due rette parallele distinte, complesse o reali, se* $(\operatorname{rg}(A) = 2, \det(B) = 0)$,
8. *una retta doppia se* $(\operatorname{rg}(A) = 1, \det(B) = 0)$.

Dimostrazione. Consideriamo una conica. L'equazione è unica a meno di moltiplicazione per una costante. Moltiplicare l'equazione per una costante $c \neq 0$ cambia la matrice A in cA e quindi moltiplica il determinante di un fattore c^3 e la traccia di B con c. Quindi il segno del $\operatorname{tr}(B)\det(A)$ e $\operatorname{rg}(A)$ non cambiano. Invece il determinante di B cambia di un fattore c^2, quindi il segno del determinante non cambia.

Se prendiamo una isometria $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ e consideriamo la matrice R come costruita in precedenza, la matrice associata a $T(C)$ è

$$R^T AR.$$

Nella Osservazione 8.35 abbiamo mostrato che $\det(R^T AR) = \det(A)$. Similmente troviamo che $\det(B), \operatorname{tr}(B)$ e $\operatorname{rg}(A)$ sono invariati sotto isometrie.

Sia

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

Dal teorema spettrale segue che possiamo determinare i valori a, b, d, e in modo che Q sia ortogonale e

$$Q \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} Q^T$$

sia diagonale, diciamo con λ_1, λ_2 sulla diagonale.

Possiamo ora applicare T con questa scelta di a, b, d, e, imponendo $c = f = 0$ e troviamo una conica con equazione

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00}.$$

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ allora $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ e quindi l'equazione non ha grado due. Quindi dopo scambiare x e y se necessario, possiamo assumere che $\lambda_1 \neq 0$. Possiamo dividere l'equazione di partenza per λ_1. Quindi possiamo assumere che $\lambda_1 = 1$.

A questo punto abbiamo ridotto ad un'equazione della forma

$$x^2 + \lambda_2 y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00}.$$

Finora abbiamo applicato soltanto isometrie che fissano l'origine. Per terminare il procedimento ci resta solamente da applicare una traslazione.

(1) Se $\lambda_2 \neq 0$, allora mandiamo (x, y) a $(x - a_{01}, y - a_{02}/\lambda_2)$. In questo modo possiamo assumere che $a_{01} = a_{02} = 0$. L'equazione risultante sarà della forma

$$x^2 + \lambda_2 y^2 + a_{00} = 0.$$

In questo caso abbiamo che $\operatorname{tr}(B)\det(A) = a_{00}\lambda_2(1 + \lambda_2)$, $\det(B) = \lambda_2$. In particolare troviamo che $\det(B) \neq 0$.

Se $\lambda_2 > 0$ e $a_{00} > 0$ non abbiamo nessuna soluzione reale, ottenendo quindi una conica complessa senza punti reali. (In questo caso $\det(A) \neq 0$, $\det(B) > 0$, $\operatorname{tr}(B)\det(A) > 0$)

Se $\lambda_2 > 0$ e $a_{00} = 0$ allora troviamo due rette complesse con un punto di intersezione reale. (In questo caso $\det(A) = 0$, $\det(B) > 0$)

Se $\lambda_2 > 0$ e $a_{00} < 0$ troviamo un'ellisse (se $\lambda_2 \neq 1$) o una circonferenza (se $\lambda_2 = 1$). (In questo caso $\det(A) \neq 0$, $\det(B) > 0$, $\operatorname{tr}(B)\det(A) > 0$)

Se $\lambda_2 < 0$ e $a_{00} \neq 0$ allora troviamo un'iperbole di assi $x - \sqrt{-\lambda_2}y$ e $x + \sqrt{-\lambda_2}y$. (In questo caso $\det(A) \neq 0$, $\det(B) < 0$)

Se $\lambda_2 < 0$ e $a_{00} = 0$ allora troviamo due rette $x - \sqrt{-\lambda_2}y$ e $x + \sqrt{-\lambda_2}y$. (In questo caso $\det(A) = 0$, $\det(B) < 0$)

(2) Nel caso che $\lambda_2 = 0$ troviamo $\det(A) = -a_{02}^2$ e $\det(B) = 0$. Se $a_{02} \neq 0$ possiamo scrivere

$$y = \frac{x^2 + 2a_{01}x + a_{00}}{-2a_{02}}$$

trovando quindi una parabola. In questo caso $\det(A) \neq 0$, $\det(B) = 0$

(3) Nel caso che $\lambda_2 = 0$ e $a_{02} = 0$ l'equazione risultante è invece

$$x^2 + 2a_{01}x + a_{00}.$$

Se $a_{01}^2 - a_{00}$ è positivo troviamo due rette parallele. Se $a_{00} = a_{01}^2$ allora troviamo una doppia retta $(x + a_{01})^2$. Se $a_{01}^2 - a_{00}$ è negativo troviamo due rette complesse coniugate senza punti di intersezione. In questo caso abbiamo $\det(A) = 0$, ma il rango di A è 1 nel caso della doppia rette ed è 2 negli altri casi.

$\square$

Osservazione 8.38. Finora abbiamo solo applicato isometrie. Se applichiamo adesso affinità più generali allora, se $\lambda_2 \neq 0$, possiamo mandare $y \mapsto 1/\sqrt{|\lambda_2|}y$. In questo modo possiamo assume che $\lambda_2 \in \{0, 1, -1\}$. Se $\lambda_2 \neq 0$ possiamo prendere $y \mapsto y - \frac{a_{12}}{\lambda_1}$, ottenendo $a_{12} = 0$.

Invece se $\lambda_2 = 0$ allora possiamo applicare $y \mapsto -y/a_{12}$ e assumere che $a_{12} = -1$. In questo modo abbiamo già ridotto le possibilità a una delle seguenti.

$$x^2 + y^2 + a_{00};\ x^2 - y^2 - a_{00};\ x^2 - y + a_{00};\ x^2 + a_{00}.$$

Nel primo e secondo caso possiamo mandare x, y a $\sqrt{|a_{00}|}x, \sqrt{|a_{00}|}y)$ (se $a_{00} \neq 0$). In questo modo troviamo $a_{00} \in \{0, 1, -1\}$. Con un procedimento simile possiamo ridurre ulteriormente le equazioni ottenendo

$$x^2+y^2+1; x^2+y^2; x^2+y^2-1; x^2-y^2+1; x^2-y^2; x^2-y^2-1; x^2-y; x^2+1; x^2-1; x^2.$$

(Conica complessa; due rette complesse che si intersecano; circonferenza; iperbole; due rette incidenti ; iperbole; parabola; due rette complesse parallele; due rette reali parallele; retta doppia).

Osservazione 8.39. Della classificazione segue che se C è un'ellisse allora esiste un'isometria tale che C sia della forma

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1,$$

con $a, b > 0$. L'ellisse ha assi di simmetria $x = 0$, $y = 0$. Il centro dell'ellisse è $(0, 0)$. I numeri a, b corrispondono ai quadrati dei semiassi dell'ellisse. Se $a < b$ diciamo che $\sqrt{a}$ è il raggio minore e $\sqrt{b}$ è il raggio maggiore dell'ellisse. Se $a = b$ allora troviamo che l'ellisse è una circonferenza.

Osservazione 8.40. Se C è un'iperbole allora otteniamo una forma ridotta del tipo

$$x^2 - cy^2 + d$$

con $c > 0$. Le rette $x - \sqrt{c}y$ e $x + \sqrt{c}y$ sono gli assi asintotici di C.

Esempio 8.41. Al variare del parametro reale k si consideri la conica C_k di equazione

$$x^2 + kxy + y^2 - 2 - k = 0\ .$$

- Si stabilisca per quali valori di k la conica C_k è degenere.
- Determinare le rette componenti le coniche degeneri tra le C_k.
- Per quali valori di k C_k è una iperbole non-degenere?
- Determinare se esistono dei valori di k per cui C_k è una parabola non degenere.
- Determinare la forma canonica metrica di C_k quando questa è un'ellisse non degenere.

Vediamo come risolvere un tale esercizio.

• Calcoliamo il determinante della matrice A_k di C_k

$$\det A_k = \det \begin{pmatrix} -2-k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k/2 \\ 0 & k/2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}(2-k)(2+k)^2\ .$$

Dunque C_k è degenere se e solo se $k = \pm 2$.

- Per $k = 2$, C_2 degenera nelle due rette $x + y = 2$ e $x + y = -2$. Per $k = -2$, C_{-2} degenera nella retta doppia $x - y = 0$.

- Quando $|k| < 2$ si ha un'ellisse. Questa poi ha sempre punti reali.
- C_k è una iperbole non-degenere se $k > 2$ o $k < -2$.
- Non esistono valori di k per cui C_k sia una parabola non degenere.
- Siamo nel caso $|k| < 2$. Si calcola facilmente che il centro dell'ellisse è sempre $(0,0)$. La forma canonica è allora

  $$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \ ,$$

  ove

  $$a = \sqrt{2} \ \ , \ \ b = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1+k/2}{1-k/2}} \ .$$