Supporto alla didattica 09 - 21-25/12/2020 - Soluzioni

Esercizio 1

Calcoliamo la matrice A associata al prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$ effettuando i prodotti scalari delel possibili coppie di vettori della base B. Abbiamo:

$$(1,1) = \int_0^1 1dt = [t]_0^1 = 1; \qquad (1,x) = \int_0^1 tdt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2};$$
$$(1,x^2) = \int_0^1 t^2dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}; \qquad (x,x) = \int_0^1 t^2dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3};$$
$$(x,x^2) = \int_0^1 t^3dt = \left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}; \qquad (x^2,x^2) = \int_0^1 t^4dt = \left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}.$$

La matrice associata alla forma bilineare $(\cdot,\cdot)$ nella base B è dunque:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Per ottenere una base di $V = \mathbf{R}[X]_{\leq 2}$ ortonormale rispetto al prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$ utilizziamo il procedimento di Gram-Schmidt: se scriviamo $B = \{v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2\}$, essa ci dice che una base ortonormale di V è data da $B' = \{w_1 = \frac{w_1'}{\|w_1'\|}, w_2 = \frac{w_2'}{\|w_2'\|}, w_3 = \frac{w_3'}{\|w_3'\|}\}$ dove

$$w_i' = v_i - \sum_{k=1}^{i-1}(w_k, v_i)w_k$$

Dunque prendiamo $w_1' = v_1 = 1$ che ha già norma 1 (essendo $\|w_1'\| = \sqrt{a_{11}} = 1$), quindi $w_1 = w_1' = 1$. Si calcola inoltre $w_2' = v_2 - (w_1, v_2)w_1 = x - \frac{1}{2}$; pertanto

$$w_2 = \frac{w_2'}{\|w_2'\|} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1 (t-\frac{1}{2})^2 dt}} = \sqrt{12}(x - \frac{1}{2}).$$

Infine, $w_3' = v_3 - (w_2, v_3)w_2 - (w_1, v_3)w_1$. Abbiamo:

$$(w_2, v_3) = (\sqrt{12}(x - \frac{1}{2}), x^2) = \sqrt{12}\int_0^1 (t^3 - \frac{1}{2}t^2)dt = \sqrt{12}\left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

e $(w_1, v_3) = (1, x^2) = a_{13} = \frac{1}{3}$, ottenendo $w_3' = x^2 - x + \frac{1}{6}$. Normalizziamo:

$$\|w_3'\| = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \frac{1}{180}.$$

Pertanto: $w_3 = \sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6})$.

Esercizio 2

Sia $v \in \mathbf{C}^n$. Definiamo la norma di $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ come

$$\|v\| := \sqrt{\bar{v}^T \cdot v} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{v}_i v_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}.$$

Essa soddisfa delle proprietà analoghe alla norma di $\mathbf{R}^n$, ovvero quelle elencate nella Proposizione 7.3 delle note. In particolare vale che $\|v\| \neq 0$ se e solo se $v \neq 0$.

Ora sia A una matrice hermitiana e sia λ un suo autovalore. Per mostrare che $\lambda \in \mathbf{R}$ basta far vedere che $\lambda = \overline{\lambda}$, dove $\overline{\lambda}$ è il coniugato di λ. Se v è un autovettore relativo a λ, allora abbiamo che

$$\lambda\|v\|^2 = \bar{v}^T \cdot \lambda v = \bar{v}^T \cdot Av = \bar{v}^T \cdot \overline{A}^T v = (\overline{Av})^T v = \overline{\lambda}\bar{v}^T v = \overline{\lambda}\|v\|^2$$

Dunque $(\lambda - \overline{\lambda})\|v\|^2 = 0$, ma poichè v, essendo un autovettore, è non nullo, abbiamo che $\|v\|^2 \neq 0$. Ciò implica che $\lambda - \overline{\lambda} = 0$ e quindi $\lambda = \overline{\lambda}$.

Ora siano λ e μ autovalori distinti di A e siano v e w dei rispettivi autovettori. Allora

$$\lambda(v^T\overline{w}) = (\lambda v)^T\overline{w} = (Av)^T\overline{w} = v^T A^T \overline{w} = v^T(\overline{A w}) = v^T(\mu\overline{w}) = \mu(v^T\overline{w}).$$

Dunque $(\lambda - \mu)v^T\overline{w} = 0$, ma visto che $\lambda \neq \mu$ dobbiamo concludere che $v^T\overline{w} = 0$.

Esercizio 3

Il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = (\cos\phi - t)(-\cos\phi - t) - \sin^2(\phi) = -\cos^2(\phi) + t^2 - \sin^2(\phi) = t^2 - 1$, dunque gli autovalori sono 1 e -1 e A è diagonalizzabile. Determiniamo delle basi per gli autospazi.

$$V_1 = \ker(A - 1) = \ker\begin{pmatrix} \cos\phi - 1 & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi - 1 \end{pmatrix}$$

Una base di di V_1 è data dal vettore $\begin{pmatrix} \cos\phi + 1 \\ \sin\phi \end{pmatrix}$ a meno che non sia nullo, cioè $\begin{cases} \cos\phi & = -1 \\ \sin\phi & = 0 \end{cases}$ ovvero $\phi = (2k+1)\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$. Osserviamo che per tali valori di ϕ la matrice diventa $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$V_{-1} = \ker\begin{pmatrix} \cos\phi + 1 & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi + 1 \end{pmatrix}$$

Una base di V_{-1} è data dal vettore $\begin{pmatrix} \cos\phi - 1 \\ \sin\phi \end{pmatrix}$ a meno che non sia nullo, cioè $\begin{cases} \cos\phi & = 1 \\ \sin\phi & = 0 \end{cases}$ ovvero $\phi = 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$. Osserviamo che per tali valori di ϕ la matrice diventa $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ricapitolando:

- Se $\phi \in \mathbf{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ allora $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\phi + 1 \\ \sin\phi \end{pmatrix} \right\rangle$ e $V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\phi - 1 \\ \sin\phi \end{pmatrix} \right\rangle$. Osserviamo che tali autovettori sono ortogonali: il prodotto scalare è $(\cos\phi - 1)(\cos\phi + 1) - \sin^2\phi = 0$.
- Se $\phi = (2k+1)\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$ allora A è diagonale, con $V_{-1} = \langle e_1 \rangle$ e $V_1 = \langle e_2 \rangle$. Si noti che $\{e_1, e_2\}$ è una base ortonormale per A.
- Se $\phi = 2\pi k$ con $k \in \mathbf{Z}$ allora A è diagonale, con $V_1 = \langle e_1 \rangle$ e $V_{-1} = \langle e_2 \rangle$. Si noti che $\{e_1, e_2\}$ è una base ortonormale per A.

La matrice A può essere scritta come $A = RS$ con

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad R := \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Sia $v := (x, y)^t$, allora $Sv = (x, -y)^t$ dunque applicare S ad un vettore v significa rifletterlo, nel piano reale $\mathbf{R}^2$, rispetto alla retta delle ascisse $y = 0$. Se indichiamo con θ l'angolo che il vettore v forma con la retta delle ascisse e definiamo $\rho := \sqrt{x^2 + y^2}$, possiamo scrivere $v = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)^t$ (cioè possiamo esprimere v in coordinate polari); così facendo, otteniamo $Rv = (\rho(\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta), \rho(\sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta))^t = (\rho\cos(\phi+\theta), \rho\sin(\phi+\theta))$, che è il nostro vettore v di partenza ruotato in senso antiorario di un angolo ϕ. Di conseguenza la trasformazione geometrica descritta dalla matrice A è una simmetria assiale rispetto all'asse delle ascisse seguita da una rotazione antioraria di un angolo ϕ.

Esercizio 4

Utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$ possiamo scrivere

$$||f(x) - f(y)|| = ||x \cdot v - y \cdot v|| = ||(x - y) \cdot v|| \le ||v|| \cdot ||x - y||$$

Dunque f è lipschtziana con costante di Lipschitz $L = ||v||$.