22. Didattica integrativa 11

Compito del 19 febbraio 2019

(1) Siano $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (t^2 + t, 1, 2t^2 + t - 4)$.

(a) Si determini per quali valori di t i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

(b) Per quali valori di t esiste una funzione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(v_1) = (1, 2, 1)$, $f(v_2) = (-1, -1, 0)$ ed $f(v_3) = (0, 1, 1)$?

(2) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -8 & 12 \\ 0 & -6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Si determini la forma di Jordan J di A, una base di $\mathbf{R}^3$ di autovettori generalizzati di A ed una matrice invertibile Q tale che $QAQ^{-1} = J$.

(3) Sia $V = \mathbf{R}[x]_{\leq 2}$. Sia

$$g : V \times V \to \mathbf{R}$$

la forma bilineare $g(p, q) = \int_{-1}^{1} p(t)(q(t)dt$.

(a) Si dia la matrice A di g rispetto alla basa canonica.

(b) Si determinino gli autovalori di A e si dimostri che g è definita positiva.

(c) Si dia una base ortogonale di V rispetto a g.

(4) Nello spazio $\mathbf{R}^5$ con il prodotto scalare standard, si considerino i punti P, Q ed R, di coordinate $P = (1, 0, 2, 0, 1)$, $Q = (0, 1, 0, 1, 0)$, $R = (2, 0, 1, 0, 2)$.

(a) Si diano equazioni parametriche e cartesiane della sottovarietà lineare più piccola che contiene P, Q ed R, da denotare π. Che dimensione ha π?

(b) Si determini l'area del triangolo di vertici P, Q ed R.

(c) Si descriva e si applichi un procedimento per calcolare la distanza di π dall'origine di $\mathbf{R}^5$.

(5) Domanda di teoria

(a) Enunciare il Teorema Spettrale.

(b) Dare la definizione di vettore isotropo.

(c) Data g, forma bilineare simmetrica semi-definita positiva, qual è la relazione tra $\ker g$ e i vettori isotropi di g?