20. Didattica integrativa 10

(1) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$, si considerino le rette
$$r : \begin{cases} x - z = 1 \\ 2y - z = 4 \end{cases}, \quad s_\alpha : \begin{cases} x + 2y - 2z = 9\alpha + 2 \\ (2 - 9\alpha)x - 2z = 6\alpha - 9\alpha^2 \end{cases}$$
   (a) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, studiare la posizione reciproca delle due rette.
   (b) Verificare che esiste un valore $\alpha \in \mathbf{R}$ per il quale r ed s_α sono incidenti ed ortogonali.
   (c) Detto $\overline{\alpha}$ il valore trovato al punto precedente, sia R' un sistema di riferimento ortonormale in cui l'asse X è la retta r, l'asse Y è la retta $s_{\overline{\alpha}}$. Scrivere le equazioni di passaggio da R ad R'.
   (d) Scrivere le equazioni nel sistema di riferimento R' delle rette s_α che sono parallele ad r.

(2) Al variare del parametro reale k si consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione
$$x^2 + 2kxy + y^2 - 1 = 0 .$$
   (a) Si stabilisca per quali valori di k la conica $\mathcal{C}_k$ è degenere.
   (b) Determinare i valori di k per cui le coniche $\mathcal{C}_k$ siano degeneri e le rette che le descrivono.
   (c) Per quali valori di k $\mathcal{C}_k$ è una ellisse non-degenere con punti reali?
   (d) Nei casi in cui $\mathcal{C}_k$ è una ellisse non-degenere con punti reali, se ne determini il centro e la forma canonica.
   (e) Determinare la forma canonica di $\mathcal{C}_k$ quando questa è un'iperbole non degenere.

(3) Nello spazio euclideo standard $\mathbf{R}^4$ con coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4), si consideri il piano
$$\pi : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$
Traslando π nella direzione del vettore $e_3 + e_4$ si descrive un iperpiano Π di $\mathbf{R}^4$.
   (a) Determinare una base dello spazio direttore W di π e una dello spazio direttore U di Π.
   (b) Determinare una equazione parametrica di Π.
   (c) Determinare una equazione cartesiana di Π.
   (d) Si determini la distanza $d(P, \Pi)$ del punto $P(1, 1, 1, 1)$ da Π.
   (e) Si determini il punto $H \in \Pi$ di minima distanza da P.

(4) Nello spazio affine standard $\mathbf{R}^3$ con coordinate (x, y, z) si considerino la retta r_0 di equazioni parametriche
$$r_0 : \begin{cases} x = -2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 1 - t \end{cases}$$
e la retta r_1 di equazioni cartesiane
$$r_1 : \begin{cases} y - z = 2 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$
   (a) Mostrare che le rette r_0 e r_1 sono sghembe.
   (b) Trovare i punti $H_0 \in r_0$ e $H_1 \in r_1$ tali che la retta h congiungente H_1 e H_2 sia perpendicolare sia ad r_0 che a r_1.