Soluzioni Tutorato 11

(1) Siano assegnate le seguenti coniche non degeneri di equazione $f(x, y) = 0$,

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \frac{1}{2} = 0 \qquad \mathcal{C}_2 : 25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0.$$

(a) Determinare la matrice B_1, B_2 della forma quadratica associata alla conica.
(b) Determinare la matrice di rotazione R_i tale che $R_i^T B_i R_i = D$, con D_i matrice diagonale.
(c) Stabilire se si tratta di un'iperbole, ellisse o parabola.
(d) Se si tratta di una conica a centro, determinarne il centro e gli assi. Se si tratta di una parabola, determinarne l'asse.

Soluzione:

(a) Data la conica $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$ la forma quadratica associata è $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$. La matrice associata alla forma quadratica delle due coniche sarà quindi:

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \; B_2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

(b) R è la matrice formata dagli autovettori normalizzati della matrice di partenza, trovata nel punto precedente. Gli autovalori di B_1 sono -2 e 4, con autovettori associati rispettivamente: $(1, -1)^t$, $(1, 1)^t$. Quindi

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

B_2 è già in forma diagonale e quindi $R_2 = I_2$.

(c) Il determinate di entrambe le matrici B_1e B_2 è negativo, per cui entrambe le coniche sono iperboli. Osserviamo che le matrici complete associate alle due coniche sono rispettivamente

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 24 \\ 0 & 25 & 0 \\ 24 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

È facile da controllare che A_1 e A_2 hanno rango 3, e quindi che $\det(A_1) \neq 0 \neq \deg(A_2)$, come implicitamente affermato nel testo dell'esercizio dal momento che le coniche assegnate sono *non degeneri.*

(d) Per determinare il centro e gli assi delle due ierboli determineremo prima la trasformazione che porta l'equazione di ciascuna di esse in forma canonica e quindi useremo tale trasformazione per determinare quanto richiesto (in questo modo vediamo anche in concreto come funziona il procedimento visto nella dimostrazione del teorema di classificazione).

Per quanto riguarda la prima conica, applichiamo la rotazione

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x_1 \\ y_1 \end{array}\right),$$

e quindi la matrice della conica trasformata è

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{array}\right)^T \left(\begin{array}{c|cc} 1/2 & 1 & 1/2 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ 1/2 & 3 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{array}\right)$$

che è uguale a

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1/2 & 1/2\sqrt{2} & 3/2\sqrt{2} \\ \hline 1/2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 3/2\sqrt{2} & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Questa matrice corrisponde alla conica di equazione

$$-2x_1^2 + 4y_1^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{2} = 0.$$

Operiamo ora la traslazione

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x_1 \\ y_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1/4\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -3/8\sqrt{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x_2 \\ y_2 \end{array}\right):$$

la conica trasformata ha ora matrice

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1/4\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -3/8\sqrt{2} & 0 & 1 \end{array}\right)^T \left(\begin{array}{c|cc} 1/2 & 1/2\sqrt{2} & 3/2\sqrt{2} \\ \hline 1/2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ 3/2\sqrt{2} & 0 & 4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1/4\sqrt{2} & 1 & 0 \\ -3/8\sqrt{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

che è uguale a

$$\left(\begin{array}{c|cc} 9/32 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Ricapitolando, grazie alla traformazione

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1/16 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -5/16 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x_2 \\ y_2 \end{array}\right),$$

la cui inversa è

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x_2 \\ y_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1/4\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 3/8\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \\ y \end{array}\right),$$

abbiamo trasformato la conica di equazione

$$x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \frac{1}{2} = 0$$

in quella in forma canonica di equazione

$$-2x_2^2 + 4y_2^2 + \frac{9}{32} = 0 \text{ ossia } \frac{64}{9}x_2^2 - \frac{128}{9}y_2^2 = 1.$$

Questa iperbole ha:

- centro di coordinate $(x_2, y_2) = (0, 0)$, che corrispondono a $(x, y) = \left(-\frac{1}{16}, -\frac{5}{16}\right)$,
- assi di equazione $x_2 = 0$ e $y_2 = 0$ che corrispondono, rispettivamente, alle rette $\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{4\sqrt{2}} = 0$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{3}{8\sqrt{2}} = 0$ (ossia $x - y = 1/4$ e $x + y = -3/8$).

Per portare la seconda iperbole in forma canonica basta invece effettuare solo una traslazione (in quanto $B_2 = I_2$): grazie alla trasformazione

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ -24/7 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ x \\ y \end{array}\right)$$

l'equazione diviene infatti

$$25x_1^2 - 7y_1^2 + \frac{625}{7} = 0 \qquad \left(\text{ossia } -\frac{7}{25}x_1^2 + \frac{49}{625}y_1^2 = 1\right).$$

Pertanto il centro dell'iperbole è $\left(0, \frac{24}{7}\right)$ mentre gli assi sono $x = 0$ e $y = \frac{24}{7}$. Il motivo per cui si è scelto di effetture proprio questa traslazione risiede nel fatto che

$$25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 25x^2 - 7\left(y^2 - \frac{48}{7}y\right) + 7 =$$

$$= 25x^2 - 7\left(y^2 - \frac{48}{7}y + \frac{576}{49}\right) + \frac{576}{7} + 7 = 25x^2 - 7\left(y - \frac{24}{7}\right)^2 + \frac{625}{7}.$$

(2) Sia $\mathcal{C}_k$ la conica di equazione

$$\mathcal{C}_k : x^2 + (k-2)xy + y^2 - 4 = 0,$$

con k parametro reale.

(a) Al variare di $k \in \mathbf{R}$, riconoscere di quale tipo di conica si tratti.
(b) Trovare le coniche degeneri della famiglia.
(c) Mostrare che ci sono due rette che sono assi di simmetria di ogni conica della famiglia.

Soluzione: La matrice B è della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{k}{2} - 1 \\ \frac{k}{2} - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi $\det(B) = 1 - (\frac{k}{2} - 1)^2$. Si controlla facilmente che $\det(A) = -4\det(B)$ e che la traccia di B è 2. Quindi per $k = 0$ e $k = 4$ abbiamo $\det(A) = \det(B) = 0$, che corrispondono alle coniche degeneri della famiglia. In particolare, per $k = 4$ abbiamo

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4 = 0 \rightsquigarrow (x+y)^2 = 4$$

e per $k = 0$ abbiamo

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0 \rightsquigarrow (x-y)^2 = 4.$$

In ambo i casi abbiamo due rette parallele.

Dal momento che $\det(A) = -4\det(B)$ e che $\operatorname{tr}(B) = 2$ deduciamo che $\det(B)$ e $\det(A)\operatorname{tr}(B)$ saranno *sempre discordi*. Dal momento che $\det(B) > 0$ per $0 < k < 4$ si ha quindi che:

- per $0 < k < 4$ abbiamo $\det(B) > 0$ e $\det(A)\operatorname{tr}(B) < 0$, quindi C_k è un'ellisse;
- per $k < 0$ oppure $k > 4$ abbiamo $\det(B) < 0$, $\det(A)\operatorname{tr}(B) > 0$, quindi C_k è un iperbole.

Notiamo che le due coniche degeneri della famiglia risultano essere simmetriche rispetto alle bisettrici dei quattro quadranti: tali simmetrie hanno equazioni $s_1(x, y) = (y, x)$ e $s_2(x, y) = (-y, -x)$ ed è quindi facile verificare che un punto $(x, y) \in \mathcal{C}_k$ se e soltanto se $s_1(x, y) \in \mathcal{C}_k$ (riepettivamente, $s_2(x, y) \in \mathcal{C}_k$).

(3) Al variare del parametro k nei numeri reali, considerare la matrice

$$A_k = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & k & 2k+1 & 3 \\ 1 & 1 & -k & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

(a) Al variare di $k \in \mathbf{R}$, stabilire se la matrice è diagonalizzabile.

(b) Nei casi in cui A_k è diagonalizzabile, trovare una base che la diagonalizza.

(c) In tutti i casi in cui A_k ha un autovalore di molteplicità algebrica 3, determinare una matrice H tale che $H^{-1}A_kH$ sia una matrice diagonale o di Jordan.

Soluzione: Applicando lo sviluppo lungo la prima riga otteniamo che il polinomio caratteristico è

$$(1-t)\det\begin{pmatrix} k-t & 2k+1 & 3 \\ 1 & -k-t & -1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

Applicando lo sviluppo lungo la terza riga otteniamo che il polinomio caratteristico è

$$(1-t)^2\det\begin{pmatrix} k-t & 2k+1 \\ 1 & -k-t \end{pmatrix}$$

Quindi il polinomio caratteristico è

$$(1-t)^2((k-t)(-k-t)-2k-1) = (1-t)^2(t^2-(k+1)^2).$$

Possiamo quindi affermare che gli autovalori (distinti) di A_k sono

- 1, $k+1$, $-k-1$ per $k \neq 0, -1, -2$, di molteplicità algebrica $m_a(1) = 2$, $m_a(k+1) = 1$, $m_a(-k-1) = 1$;
- 1, -1 per $k = 0$, di molteplicità algebrica $m_a(1) = 3$, $m_a(-1) = 1$;
- 1, -1 per $k = -2$, di molteplicità algebrica $m_a(1) = 3$, $m_a(-1) = 1$;
- 1, 0 per $k = -1$, di molteplicità algebrica $m_a(1) = 2$, $m_a(0) = 2$.

Calcoliamo la molteplicità geometrica degli autovalori, a cominciare dall'autovalore 1. La matrice $A_k - I_4$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & k-1 & 2k+1 & 3 \\ 1 & 1 & -k-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sommando tre volte la terza riga sulla seconda dà

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k+2 & -k-2 & 0 \\ 1 & 1 & -k & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $m_g(1) = 2$ per $k \neq -2$ e $m_g(1) = 3$ per $k = -2$. Nel primo caso l'autospazio è generato da $\{(1,0,0,1)^T, (0,1,1,-k)^T\}$, mentre nel secondo una base è $\{(1,0,0,1)^T, (0,1,0,1)^T, (0,1,1,2)^T\}$.

Per l'autovalore $k+1$ troviamo che $A_k - (k+1)I_4$ è

$$\left(\begin{pmatrix} -k & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2k+1 & 3 \\ 1 & 1 & -2k-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix}\right).$$

Se $k = 0$ allora $k+1 = 1$ e sappiamo che la matrice ha rango 2, quindi $m_g(k+1) = 2$ ed una base per l'autospazio è $\{(1,0,0,1)^T, (0,1,1,0)^T\}$. Se $k \neq 0$ allora la prima, seconda e quarta riga sono linearmente indipendente, e la terza è un moltiplo della seconda, quindi il rango è 3. Segue che per $k \neq 0$ si ha $m_g(k+1) = 1$ e troviamo che l'autospazio è generato da $(0, 2k+1, 1, 0)$.

Per l'autovalore $-k-1$ abbiamo che la matrice $A_k + (k+1)I_4$ è

$$\left(\begin{pmatrix} k+2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2k+1 & 2k+1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}\right).$$

Se $k = -2$ allora l'autovalore è $-k-1 = 1$ ed abbiamo già ossrvato che in questo caso è $m_g(-1) = 3$. Se $k \neq -2$ allora la prima, terza e quarta riga sono indipendenti, invece il determinante della matrice è zero, quindi il rango è 3. Segue che $m_g(-k-2) = 1$, e un generatore per l'autospazio è $(0, -1, 1, 0)$.

Ricapitoliamo quindi quanto abbiamo trovato:

- Se $k \neq -2, -1, 0$ allora ci sono tre autovalori, che sono 1, $k+1$ e $-k-1$. Si ha che $m_a(1) = m_g(1) = 2$ e che $m_a(k+1) = m_g(k+1) = 1$, $m_a(-k-1) = m_g(-k-1) = 1$, e gli autospazi sono generati, rispettivamente, da $\{(1,0,0,1)^T, (0,1,1,-k)^T\}$, da $\{(0, 2k+1, 1, 0)^T\}$ e da $\{(0,-1,1,0)^T\}$. Segue che A_k è diagonalizzabile e che una base in cui A_k è in forma diagonale è data dall'unione dei tre sistemi di generatori trovati.
- Se $k = 0$ allora gli autovalori sono 1 e -1. In questo caso l'autovalore 1 ha $m_a(1) = 3$, ma essendo $m_g(1) = 2$ si ha che la matrice A_0 non è diagonalizzabile.
- Se $k = -1$ allora gli autovalori sono 1 e 0, entrambi di molteplicità algebrica 2. Dal momento che anche $m_g(1) = 2$ e $m_g(-1) = 1$, la matrice A_{-1} non è diagonalizzabile.
- Se $k = -2$ allora gli autovalori sono 1 e -1. In questo caso abbiamo che $m_a(1) = m_g(1) = 3$ e $m_a(-1) = m_g(-1) = 1$, quindi la matrice è diagonalizzabile, ed una base in cui è in forma diagonale è data da $\{(0,1,1,2)^T, (1,0,0,1)^T, (0,1,0,1)^T, (0,-3,1,0)^T\}$ (l'ultimo vettore è il generatore dell'autospazio relativo all'autovalore $k+1 = -1$).

Ci sono solo due casi in cui la matrice A_k ha un autovalore di molteplicità algebrica 3: sono per $k = 0$ e per $k = -2$. Abbiamo già osservato che A_{-2} è diagonalizzabile e che la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è tale che $H^-1A_{-2}H$ sia diagonale (con entrate $1, 1, 1, -1$ sulla diagonale). Rimane solo da considerare il caso in cui $k = 0$, in cui A_0 non è diagonalizzabile. Dobbiamo quindi andare a considerare gli autovettori generalizzati relativi all'autovalore 1. Si ha che

$$A_0 - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A_0 - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & -4 \\ -4 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ed è quindi facile osservare che la matrice $(A_0 - I_4)^2$ ha rango 1. Segue che lo spazio degli autovettori generalizzati ha dimensione 3, ed una base per tale spazio, ottenuta completando la base precedentemente trovata per l'autospazio relativo all'autovalore 1 è data da

$$\{(1,0,0,1)^T, (0,1,1,0)^T, (1,0,2,0)^T\}.$$

Ma allora una matrice H tale che $H^{-1}A_0H$ sia in forma di Jordan è data da

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad V = \{X \in M_{2\times 2}(\mathbf{R}) | X = X^T\}$$

e sia $\varphi : V \times V \to \mathbf{R}$ l'applicazione definita da

$$\varphi(X, Y) = \mathrm{Tr}(XAY).$$

(a) Mostrare che φ è una forma bilineare simmetrica.
(b) Determinare una base di V rispetto alla quale la matrice di φ sia in forma diagonale, classificando poi φ in base ad essa.
(c) Determinare il nucleo di φ, stabilendo se esso è un sottospazio di V.
(d) Sia U il sottospazio generato da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare il complemento ortogonale di U rispetto a φ e stabilire se esso è in somma diretta con U.

Soluzione: Sappiamo che la traccia $tr : M_{n\times n}(K) \to K$, e moltiplicazione di matrici sono lineari. Quindi

$$\begin{aligned} \varphi(X + \lambda Z, Y) &= \mathrm{tr}((X + \lambda Z)AY) = \mathrm{tr}(XAY + \lambda ZAY) \\ &= \mathrm{tr}(XAY) + \lambda\,\mathrm{tr}(ZAY) = \varphi(X, Y) + \lambda\varphi(Z, Y) \end{aligned}$$

Similmente si mostra che φ è lineare nel secondo fattore.

Per la simmetria si nota che $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(B^T)$ per ogni matrice quadrata. Ma allora

$$\mathrm{tr}(XAY) = \mathrm{tr}((XAY)^T) = \mathrm{tr}(Y^T A^T X^T) = \mathrm{tr}(YAX)$$

(Le matrici X, Y sono in V, quindi $X = X^T$ e $Y = Y^T$. Si controlla facilmente che $A^T = A$.)

Una base di V è

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rispetto a questa base troviamo che φ è rappresentata dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

In particolare notiamo che X_1 e X_3 sno tra di loro ortogonali e che $\varphi(X_1, X_1) = \varphi(X_3, X_3) = 1$.

Si vede poi facilmente che il vettore $(1, 1, 1)$ è un generatore del nucleo, quindi

$$\varphi\left(X, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

per ogni $X \in V$.

Quindi la matrice rappresentativa di φ rispetto alla base

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = X_1 + X_2 + X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è
$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
La forma è semidefinita positiva, perché gli autovalori sono non negativi, ed è presente l'autovalore 0.

Per quanto riguarda l'ultimo punto, abbiamo già osservato che tutte le matrici sono ortognali a Y. Rispetto alla seconda matrice, X_1, dalla matrice F ricaviamo che $X_1^{\perp}$ è il sottospazio generato da
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Pertanto
$$U^{\perp} = \operatorname{span}(X_3, Y)$$
e quindi U e $U^{\perp}$ non sono in somma diretta (cosa che si poteva dedurre subito dal fatto che $\ker \varphi \subseteq U$).