21. Tutorato 11

(1) Siano assegnate le seguenti coniche non degeneri di equazione $f(x,y)=0$,

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \frac{1}{2} = 0 \qquad \mathcal{C}_2 : 25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0.$$

(a) Determinare le matrici B_1, B_2 della forma quadratica associata alle coniche.
(b) Determinare la matrice di rotazione R_i tale che $R_i^T B_i R_i = D_i$, con D_i matrice diagonale.
(c) Stabilire se si tratta di un'iperbole, ellisse o parabola.
(d) Se si tratta di una conica a centro, determinarne il centro e gli assi. Se si tratta di una parabola, determinarne l'asse.

(2) Sia $\mathcal{C}_k$ la conica di equazione

$$\mathcal{C}_k : x^2 + (k-2)xy + y^2 - 4 = 0,$$

con k parametro reale.
(a) Al variare di $k \in \mathbf{R}$, riconoscere di quale tipo di conica si tratti.
(b) Trovare le coniche degeneri della famiglia.
(c) Mostrare che ci sono due rette che sono assi di simmetria di ogni conica della famiglia.

(3) Al variare del parametro k nei numeri reali, considerare la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & k & 2k+1 & 3 \\ 1 & 1 & -k & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Al variare di $k \in \mathbf{R}$, stabilire se la matrice è diagonalizzabile.
(b) Nei casi in cui A_k è diagonalizzabile, trovare una base che la diagonalizza.
(c) In tutti i casi in cui A_k ha un autovalore di molteplicità algebrica 3, determinare una matrice H tale che $H^{-1}A_kH$ sia una matrice diagonale o di Jordan.

(4) Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad V = \{X \in M_{2\times 2}(\mathbf{R}) | X = X^T\}$$

e sia $\varphi : V \times V \to \mathbf{R}$ l'applicazione definita da

$$\varphi(X,Y) = \mathrm{Tr}(XAY).$$

(a) Mostrare che φ è una forma bilineare simmetrica.
(b) Determinare una base di V rispetto alla quale la matrice di φ sia in forma diagonale, classificando poi φ in base ad essa.
(c) Determinare il nucleo di φ, stabilendo se esso è un sottospazio di V.
(d) Sia U il sottospazio generato da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare il complemento ortogonale di U rispetto a φ e stabilire se esso è in somma diretta con U.